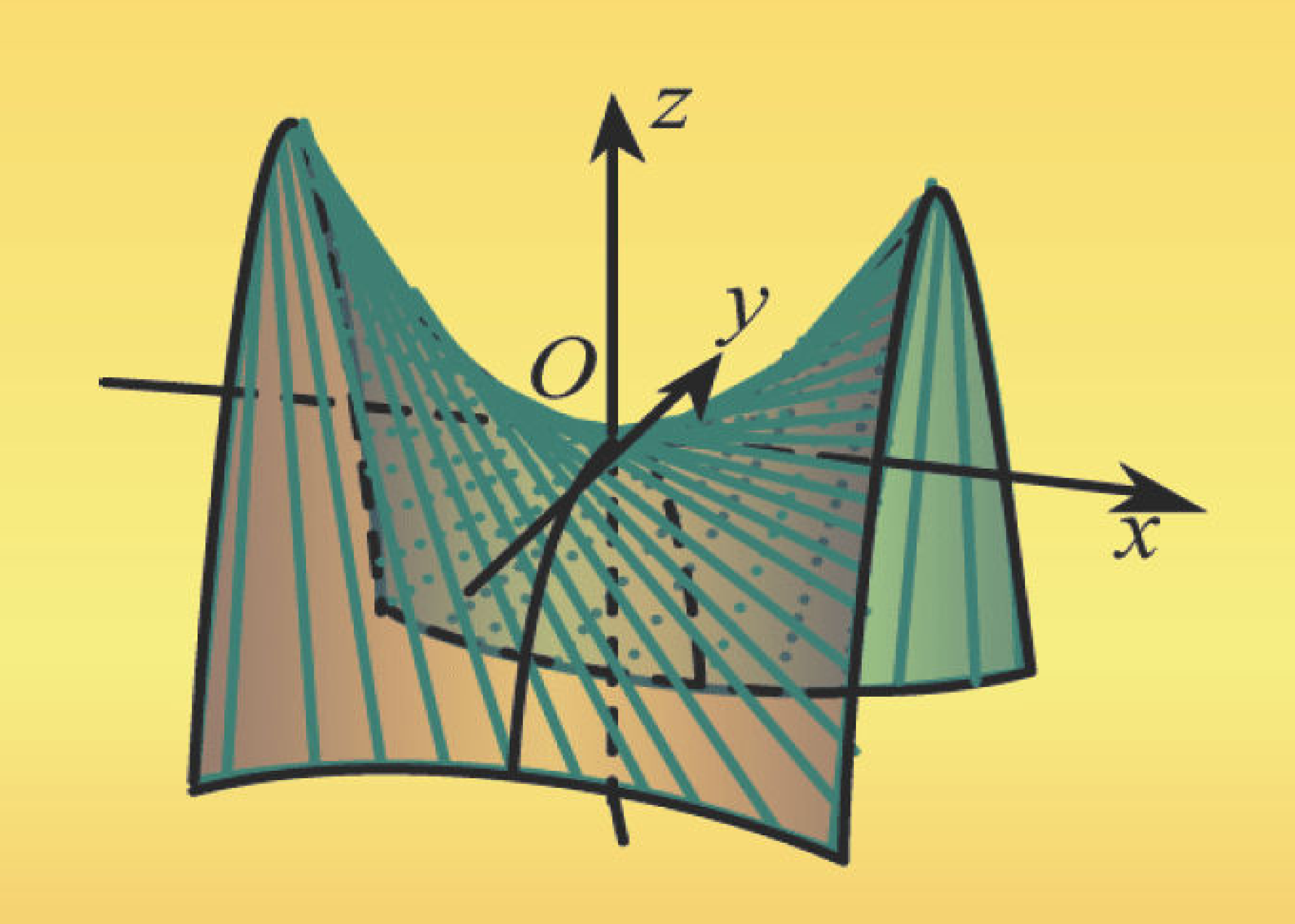
高孝忠 罗 淼 编著

解析几何



清华大学出版社

本教材是贵州师范大学“教育部高等学校特色专业——数学与应用数学专业”（TS2375）建设内容之一

解析几何

高孝忠　罗　淼　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书主要介绍空间解析几何的内容.全书共5章,第1章给出向量的概念与运算,第2章给出轨迹与方程的关系,第3章讨论空间中最简单的形——平面与直线,第4章讨论常见的曲面,第5章给出二次平面曲线的一般理论.书中立体图大多采用彩色插图,立体感强,易于理解,更便于教与学.

本书根据多年的教学经验编写,可作为高等院校"解析几何"课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/高孝忠,罗淼编著.—北京:清华大学出版社,2011.8

ISBN 978-7-302-26595-5

Ⅰ.①解…　Ⅱ.①高…②罗…　Ⅲ.①解析几何　Ⅳ.①O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175501号

责任编辑:刘　颖
责任校对:刘玉霞
责任印制:杨　艳

出版发行:清华大学出版社　　**地　址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**:100084
社　总　机:010-62770175　　**邮　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印　装　者:保定市中画美凯印刷有限公司
经　销:全国新华书店
开　本:140×203　**印　张**:6.375　**插　页**:4　**字　数**:170千字
版　次:2011年8月第1版　　**印　次**:2011年8月第1次印刷
印　数:1~3000
定　价:19.00元

产品编号:044393-01

前　言

17 世纪，笛卡儿引进了坐标，从而开创了几何学的新局面，甚至可以说开创了数学的新局面，因为微积分的发现就深受其影响，且坐标的出现让“仿射几何”、“黎曼几何”等相继问世.

坐标引入的实质就是用“数”去描述“形”，如今的“量化管理”就源于这种思想. 所以我们可以说，解析几何是一门用“数”去描述“形”和用“形”解释“数”的学科.

坐标的雏形是“不同方向的线段长”. 后来经数学家们的改造，用“向量法”引入坐标，这让我们站在一个新的高度去认识它，即“坐标是极大线性无关向量组的表出系数构成的有序数组”.

如今解析几何已是大学的必修课程. 在“普及教育”而不是“精英教育”的今天，我们要让每一个学生都掌握数学的思想与方法，就必须让学生处于“数”与“形”的两个角度去认识同一个对象. 就连“向量”这个联系“数”与“形”的工具也不例外，本书给出了 3 个解释，即：

(1) 初浅解释：具有大小和方向的量；

(2)“形”的解释：有向线段；

(3)“数”的解释：有序数组.

对于向量的运算，如加、数乘、内积、外积等，也不例外. 只有

这样,才能使学生不会产生“瞎子摸象”的片面认识.

本书是根据多年的教学经验,为师范院校数学专业“解析几何”课编写的教材.解析几何的教材很多,各有春秋,本书有如下的特点.

(1) 宗旨:采用通俗易懂的语言.

林群院士说:“深奥的东西,能说你懂了,以什么为标准呢?那就是看你能否用粗浅的语言去描述.”本书的编写以此为宗旨,语言通俗易懂,学生喜闻乐见,容易接受.

(2) 题材:采用抽象与应用相结合.

应用体现理论与实际的联系.知道了抽象的过程,就知道应用的方法.对每一个抽象的概念,都给出其引入的情境,告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容:采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理,是数学的基本要求之一.本书注重引导学生能从简单的解释达到严密的论证,掌握数学思维方法,培养逻辑推理能力.

(4) 形式:采用立体彩图,图文并茂.

进入新世纪,教材的版面设计水平不断提高,讲求实用、有特色和创新,注重图文并茂.本书较之该学科教材一贯采用黑白立体图有了突破,对于书中立体图形大多采用彩色插图,直观、空间感强,立体效果更好,对培养学生空间想象能力大有帮助.而且图形配合恰当,易于理解,更有利于教与学.

(5) 教学:配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都有多媒体课件(教学光盘).课件中的教学情境设置得当,动图效果生动,在教学实践中得到同行教师与学生的好评.

本书在编写、修订过程中,得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持.清华大学出版社编辑刘颖、贵州师范大学的游泰杰教授,对本书的修订提出了很多宝贵的意见,特在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠　罗　淼

2011年6月

常用的数学符号

$\forall$——对于任意指定的(泛指);

$\exists$——存在,可以找到(特指);

$\exists^0$——存在不全为零的数组;

$\exists|$——唯一存在;

$\ni$“……”——使得“……”成立,满足“……”条件;

$\Rightarrow$——蕴涵,可以推出;

$\Leftrightarrow$——等价,充分必要;

$(\Rightarrow)$——必要性;

$(\Leftarrow)$——充分性;

ie:——换句话说,即;

$\angle(\vec{a},\vec{b})$——两个向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 的夹角,$0\leqslant\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant\pi$;

$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$——有向角.将向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 的始点归结为一点,以向量 $\vec{a}$ 所在射线为始边,以向量 $\vec{b}$ 所在射线为终边按逆时针方向为正所成的角,$-\infty<\measuredangle(\vec{a},\vec{b})<+\infty$.

目　录

第 1 章　坐标系与向量 …………………………………… 1

1.1　坐标系与向量的概念 ……………………… 1

习题 1.1 ………………………………………… 5

1.2　向量的线性运算 ………………………… 5

习题 1.2 ……………………………………… 10

1.3　三元线性方程组与行列式 ……………… 11

习题 1.3 ……………………………………… 16

1.4　向量组的线性关系 ……………………… 17

习题 1.4 ……………………………………… 23

1.5　标架与坐标 ……………………………… 24

习题 1.5 ……………………………………… 29

1.6　两向量的数量积 ………………………… 30

习题 1.6 ……………………………………… 35

1.7　数量积的坐标表示 ……………………… 35

习题 1.7 ……………………………………… 39

1.8　两向量的向量积 ………………………… 40

习题 1.8 ……………………………………… 45

1.9　三向量的混合积 ………………………… 46

习题 1.9 ……………………………………… 51

1.10 三向量的双重向量积 …………………………………… 51
习题 1.10 ……………………………………………………… 54

第 2 章 轨迹与方程 ……………………………………… 55

2.1 平面曲线的方程……………………………………… 55
习题 2.1 ……………………………………………………… 61
2.2 曲面的方程……………………………………………… 62
习题 2.2 ……………………………………………………… 67
2.3 空间曲线的方程……………………………………… 68
习题 2.3 ……………………………………………………… 71

第 3 章 平面与空间直线 ………………………………… 72

3.1 平面的方程……………………………………………… 72
习题 3.1 ……………………………………………………… 78
3.2 平面与点、平面与平面的相关位置 ………………… 79
习题 3.2 ……………………………………………………… 84
3.3 空间直线的方程……………………………………… 85
习题 3.3 ……………………………………………………… 90
3.4 直线与平面、直线与点的相关位置 ………………… 91
习题 3.4 ……………………………………………………… 95
3.5 空间两直线的相关位置……………………………… 95
习题 3.5 ……………………………………………………… 100
3.6 平面束 ……………………………………………………… 101
习题 3.6 ……………………………………………………… 105

第 4 章 常见的曲面……………………………………… 106

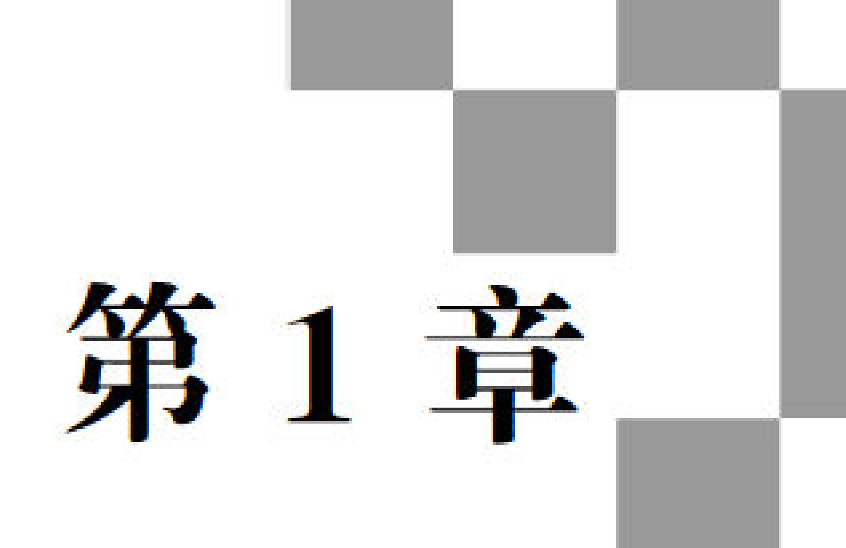
4.1 柱面 ………………………………………………………… 106
习题 4.1 ……………………………………………………… 112
4.2 锥面 ………………………………………………………… 113

习题 4.2 …… 118
4.3 旋转曲面 …… 118
习题 4.3 …… 123
4.4 椭球面 …… 124
习题 4.4 …… 127
4.5 双曲面 …… 128
习题 4.5 …… 132
4.6 抛物面 …… 133
习题 4.6 …… 136
4.7 直纹面 …… 137
习题 4.7 …… 143
4.8 数学制图 …… 143
习题 4.8 …… 151

第 5 章 二次曲线的一般理论 …… 152

5.1 二次曲线的基本概念 …… 152
习题 5.1 …… 158
5.2 二次曲线的切线 …… 158
习题 5.2 …… 162
5.3 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线 …… 163
习题 5.3 …… 167
5.4 二次曲线的直径 …… 167
习题 5.4 …… 173
5.5 二次曲线的主直径与主方向 …… 173
习题 5.5 …… 178
5.6 二次曲线的方程的化简与分类 …… 178
习题 5.6 …… 193

参考文献 …… 194



第 1 章

坐标系与向量

1.1　坐标系与向量的概念

我们知道,在空间几何形体中,其要素有点、线、面. 而线可视为点运动的轨迹,面可视为线运动的轨迹,所以点是空间几何形体的基本元素. 要建立点与数的对应,就必须给予标架. 如平面几何中,我们建立坐标系后,平面上的点就与有序数对(x,y)构成了一一对应. 空间中的点要与数构成一一对应,也必须建立坐标系后才能实现.

1. 空间直角坐标系

在空间给出一定点 O,以点 O 为原点,引出三条相互垂直的数轴,分别称为 x 轴、y 轴、z 轴. 由原点 O 与 x 轴、y 轴、z 轴构成的集合称为**直角标架**,记作

$$\{O;x,y,z\}.$$

如图 1-1-1 所示,如果 x 轴、y 轴、z 轴的方向分别与我们右手的拇指、食指、中指对应,则此标架称为**右手直角标架**,否则称为**左手直角标架**. 右手直角标架与左手直角标架作任意的平移与旋转也不会重合,就如我们的左手与右手怎么运动也不会重合. 在这里,我们常用的标架是右手直角标架.

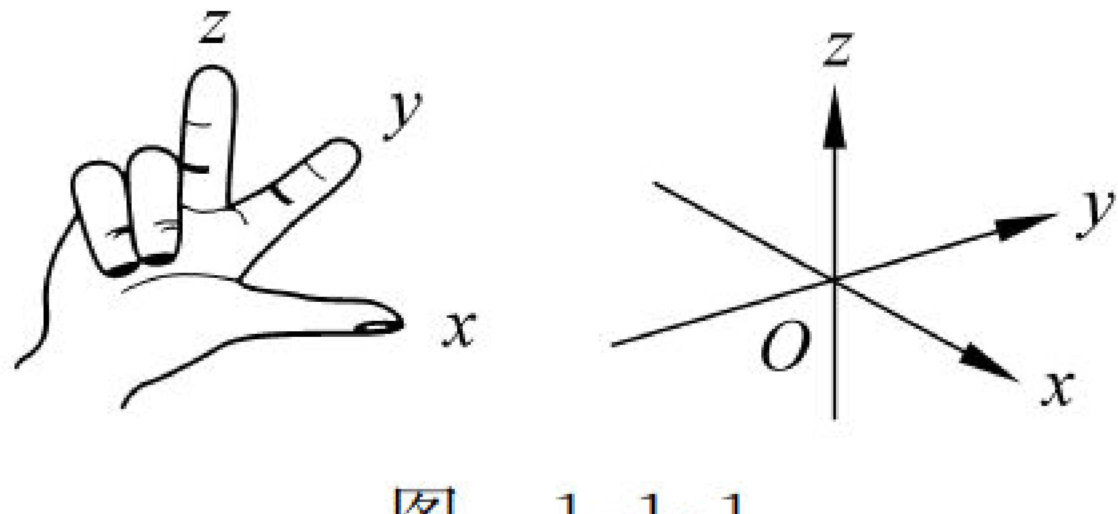


图　1-1-1

由 x 轴、y 轴所确定的平面称为 xOy 坐标面,由 x 轴、z 轴所确

定的平面称为 xOz 坐标面，由 y 轴、z 轴所确定的平面称为 yOz 坐标面. 三个坐标面把空间分为八个区域，每个区域称为卦限. 每一个卦限用大写的罗马字母表示. 如图 1-1-2 所示，其中：第Ⅰ卦限满足：$x>0,y>0,z>0$；第Ⅱ卦限满足：$x<0,y>0,z>0$；第Ⅲ卦限满足：$x<0,y<0,z>0$；第Ⅳ卦限满足：$x>0,y<0,z>0$；第Ⅴ卦限满足：$x>0,y>0,z<0$；第Ⅵ卦限满足：$x<0,y>0,z<0$；第Ⅶ卦限满足：$x<0,y<0,z<0$；第Ⅷ卦限满足：$x>0,y<0,z<0$.

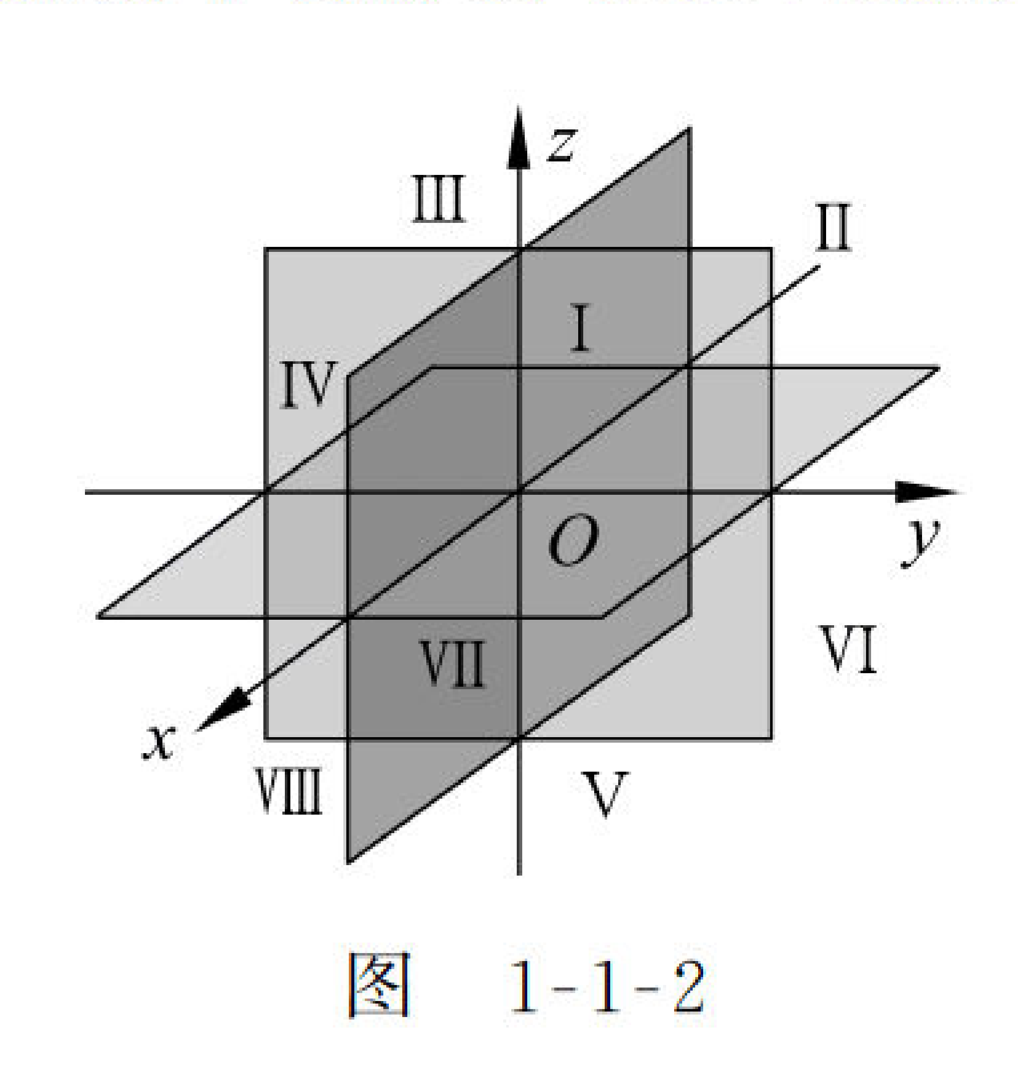


图　1-1-2

设点 P 是空间中的任意一点，过点 P 作三个平行于坐标面的平面与坐标轴的交点分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$，则点 P 的位置由三元有序数组唯一确定，我们称三元有序数组 (x,y,z) 为点 P 的坐标，记作 $P(x,y,z)$. 我们建立的直角标架与空间中的所有点构成的集合称为**空间直角坐标系**. 显然，$P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$ 两点的距离为

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

2. 向量

我们在中学已学过向量，其解释为具有大小与方向的量称为向量. 今给出“形”的定义.

定义 1.1.1　有向线段称为向量. 有向线段的方向称为向量的方向，有向线段的始点和终点称为向量的始点和终点，而有向线段的长度表示向量的大小.

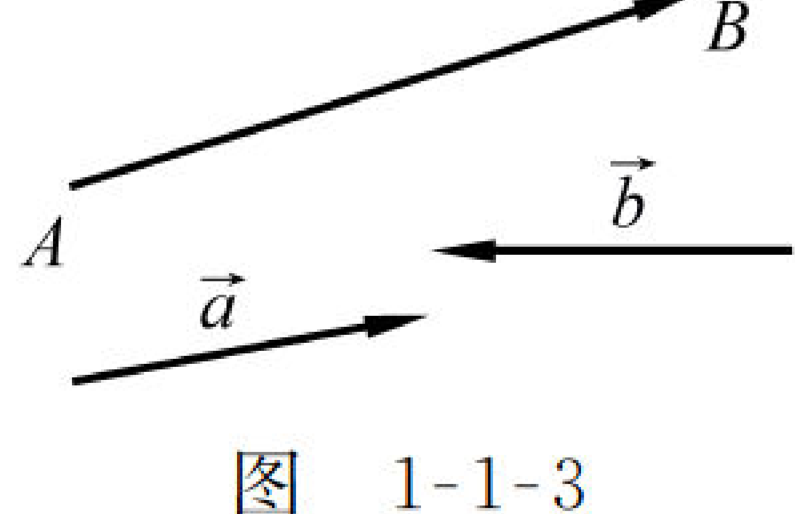


图　1-1-3

如图 1-1-3 所示，始点为 A、终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，也可以用在小写字母上面加箭头表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ 等. 用小写字母表示向量时，字母一般写在有向线段的中部. 还可以用小写的黑斜体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$ 等.

向量$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$的大小称为$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**，记作$\vec{a}^0$. 模为 0 的向量称为**零向量**，记作$\vec{0}$. 不是零向量的向量称为**非零向量**.

两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$所在的直线平行，则称向量$\vec{a}$、$\vec{b}$平行，记作$\vec{a}/\!/\vec{b}$. 同样可获得向量$\vec{a}$与某直线l平行是指$\vec{a}$所在的直线与直线l平行，向量$\vec{a}$与平面π平行指$\vec{a}$所在的直线与平面π平行等概念.

要在向量中赋予运算，必须给出向量相等的概念. 何为两个向量相等，请看下面的定义.

定义 1.1.2　如果两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的模相等，方向相同，则称向量$\vec{a}$、$\vec{b}$相等，记作$\vec{a}=\vec{b}$. 所有零向量都相等.

由定义 1.1.2 可以看到，两个向量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定，我们把这样的向量称为自由向量，即下面的定义.

定义 1.1.3　只由模和方向决定的向量称为**自由向量**. 对自由向量，$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$经平移后能重合.

在建立直角标架后，始点在原点的向量称为**向径**.

由向量相等的定义可得，不在一条直线上的两个相等向量的始点与终点可获得一个平行四边形，参见图 1-1-4. 因为向量$\overrightarrow{AB}$等于向量$\overrightarrow{CD}$，所以四边形$ABDC$是平行四边形. 实因向量$\overrightarrow{AB}$等于向量$\overrightarrow{CD}$，所以向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{CD}$平行，而且向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{CD}$的模相等，故由平行四边形的定义知四边形$ABDC$是平行四边形. 反之，由两个向量的始点与终点获得一个平行四边形，却不能得到这两个向量相等. 例如图 1-1-5 给出的两个向量的始点与终点获得了一个平行四边形$ABCD$，但是向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{CD}$并不相等. 由此，我们得到了反向量的概念.

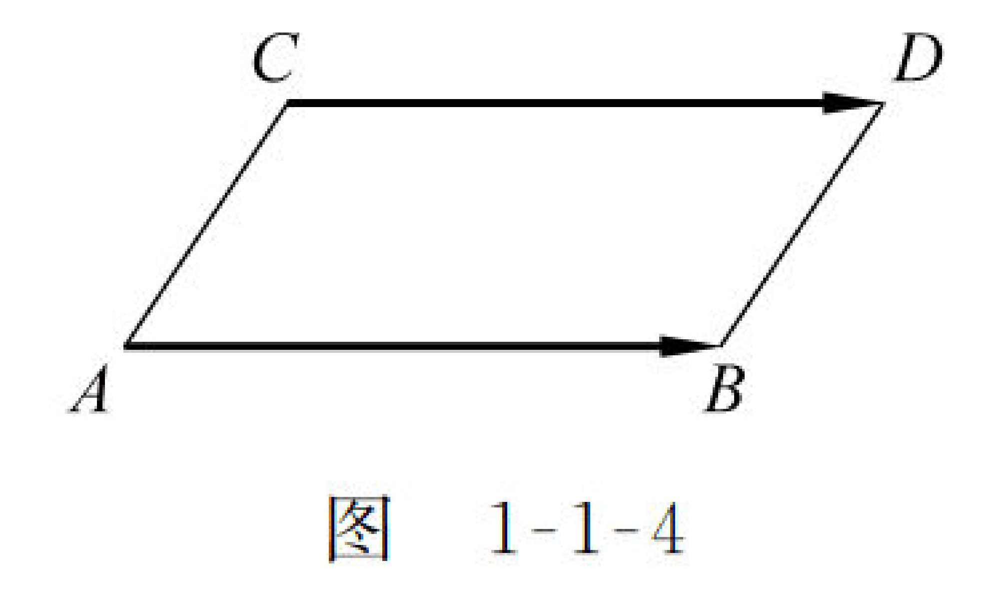


图　1-1-4

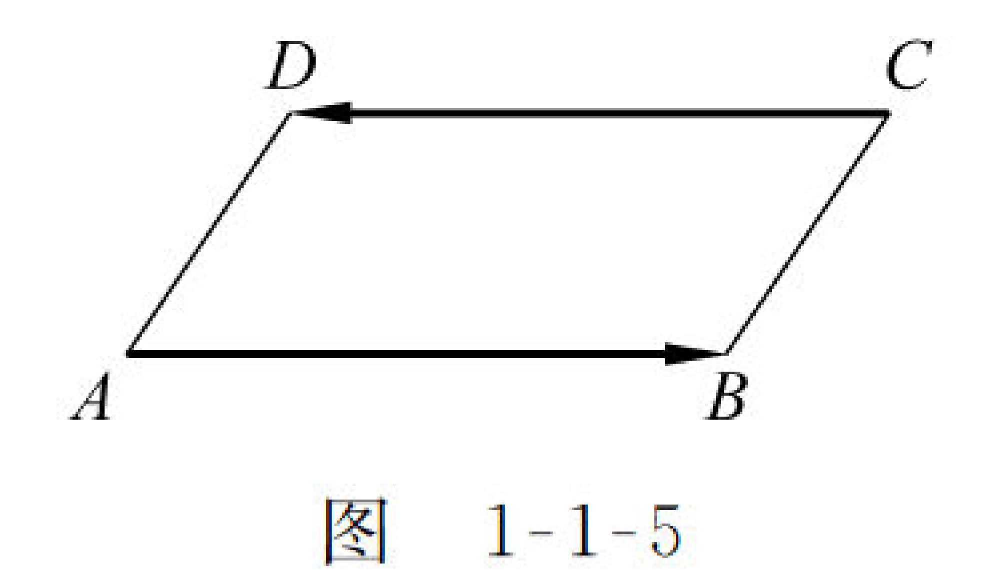


图　1-1-5

定义 1.1.4　两个模相等,方向相反的向量称为**互反向量**,向量 $\vec{a}$ 的反向量记作 $-\vec{a}$.

显然,向量$\overrightarrow{AB}$的反向量是向量$\overrightarrow{BA}$,即向量$\overrightarrow{AB}$等于向量$-\overrightarrow{BA}$. 如果两个向量的始点与终点获得一个平行四边形,则这两个向量相等或相反.

我们把位于直线 l 上的向量 $\vec{a}$ 也称为 $\vec{a}$ 与 l 平行,把位于平面 π 上的向量 $\vec{a}$ 也称为 $\vec{a}$ 与 π 平行,则有下面定义.

定义 1.1.5　平行于同一直线的向量称为共线向量,零向量与任一向量共线.

定义 1.1.6　平行于同一平面的向量称为共面向量,零向量与任一向量共面.

显然,共线向量必共面,任意两个向量必共面. 而且共线具有传递性,即

如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线,$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线.

在平面$\mathbb{R}^2$上,当我们建立了坐标系后,平面上的点与有序数对(x,y)构成了一一对应. 这样,就平面上的点 $A(x,y)$,以原点 O 为始点,A 为终点的向量$\overrightarrow{OA}$就可以用有序数对(x,y)表示,称平面上的向量为有序数对,即

$$\overrightarrow{OA}=(x,y).$$

拓广到三维空间$\mathbb{R}^3$,$A(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,$\overrightarrow{OA}=(x,y,z)$. 并称向量$\overrightarrow{OA}$为向径,即$\mathbb{R}^3$中的向径是三元有序数组. 当然,$n$ 维空间$\mathbb{R}^n$中的向径就是 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 于是我们就得到下面的定义.

定义 1.1.7　二元有序数对(x,y)称为二维向量,三元有序数组(x,y,z)称为三维向量.

定义 1.1.7 称为向量的“数”的定义.

在$\mathbb{R}^2$中,以 $A(x_1,y_1)$为始点,$B(x_2,y_2)$为终点的向量是

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1).$$

在$\mathbb{R}^3$中,以 $A(x_1,y_1,z_1)$为始点,$B(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量是$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 即用终点坐标减去始点坐标.

在“形”的定义中，我们要考核两个向量相等，必须经过平移看是否重合，而且方向要相同. 现在有了“数”的定义后，要考核两个向量是否相等就简单多了.

如 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-x_1=x_4-x_3,\\ y_2-y_1=y_4-y_3,\\ z_2-z_1=z_4-z_3.\end{cases}$$

习　题　1.1

1. 下列情形中，向量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位向量的始点归结为一点；

(2) 把平行于某一平面的一切单位向量的始点归结为一点；

(3) 把平行于某一直线的一切向量的始点归结为一点；

(4) 把平行于某一直线的一切单位向量的始点归结为一点.

2. 如图 1-1-6 所示，设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的上、下底面，在向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线向量与共面向量.

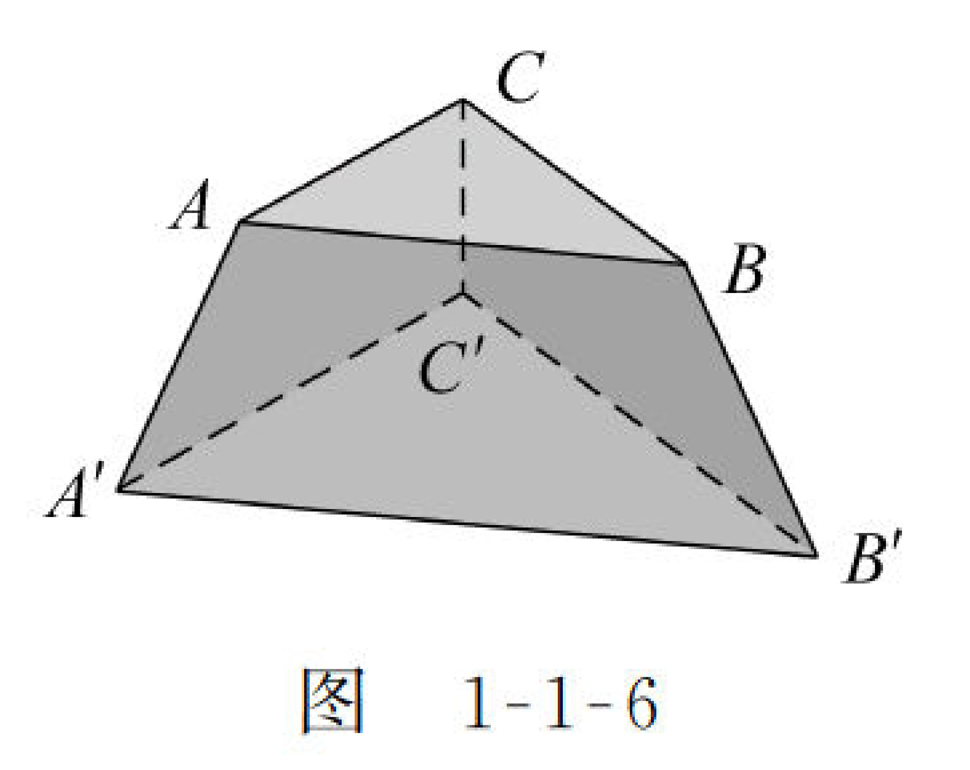


图　1-1-6

1.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.2.1　设有向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，如图 1-2-1 所示，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，再以点 B 为始点，作 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，连接 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a}+\vec{b}$，即

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

求向量和运算称为向量的**加法运算**.

上述的求和方法称为三角形法则.在力学中求两个力的合力时,用到了平行四边形法则,如图1-2-2所示,其与三角形法则是等价的.

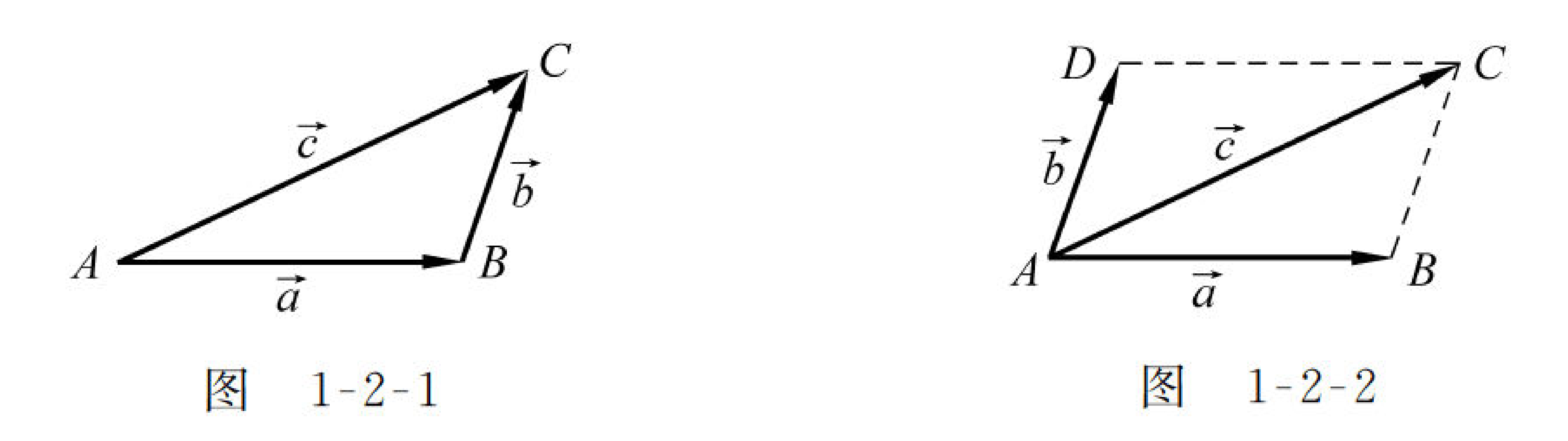


图　1-2-1　　　　图　1-2-2

显然,共线的两个向量的和必与这两个向量共线.

定义 1.2.2　设有向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,定义

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

定义1.2.1与定义1.2.2是等价的.实因:取

$$A(0,0,0),\quad B(x_1,y_1,z_1),$$

则

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)=\overrightarrow{AB},$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2,z_2)$$
$$=((x_1+x_2)-x_1,(y_1+y_2)-y_1,(z_1+z_2)-z_1),$$

于是 $\overrightarrow{AC}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

定理 1.2.1　向量的加法运算具有下面的运算律.

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(3) 零元　$\forall\vec{a},\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(4) 逆元　$\forall\vec{a},\exists-\vec{a},\ni$"$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$".

证　设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,$\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$.

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$$=(x_2+x_1,y_2+y_1,z_2+z_1)=\vec{b}+\vec{a},$$

所以 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3,(z_1+z_2)+z_3)$

$=(x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3),z_1+(z_2+z_3))$

$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

所以 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{c})$.

(3) 取 $\vec{0}=(0,0,0)$,则 $\forall\vec{a}=(x,y,z)$,

$$\vec{a}+\vec{0}=(x+0,y+0,z+0)=(x,y,z)=\vec{a}.$$

(4) $\forall\vec{a}=(x,y,z)$,取 $-\vec{a}=(-x,-y,-z)$,则 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

由于向量的加法运算满足交换律与结合律,故 $n(n\geqslant 3)$ 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 相加可表示为

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n.$$

且如图 1-2-3 所示,依次取 $\overrightarrow{A_0A_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$,则 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\overrightarrow{A_0A_n}$. 这种求和的方法称为多边形法则.

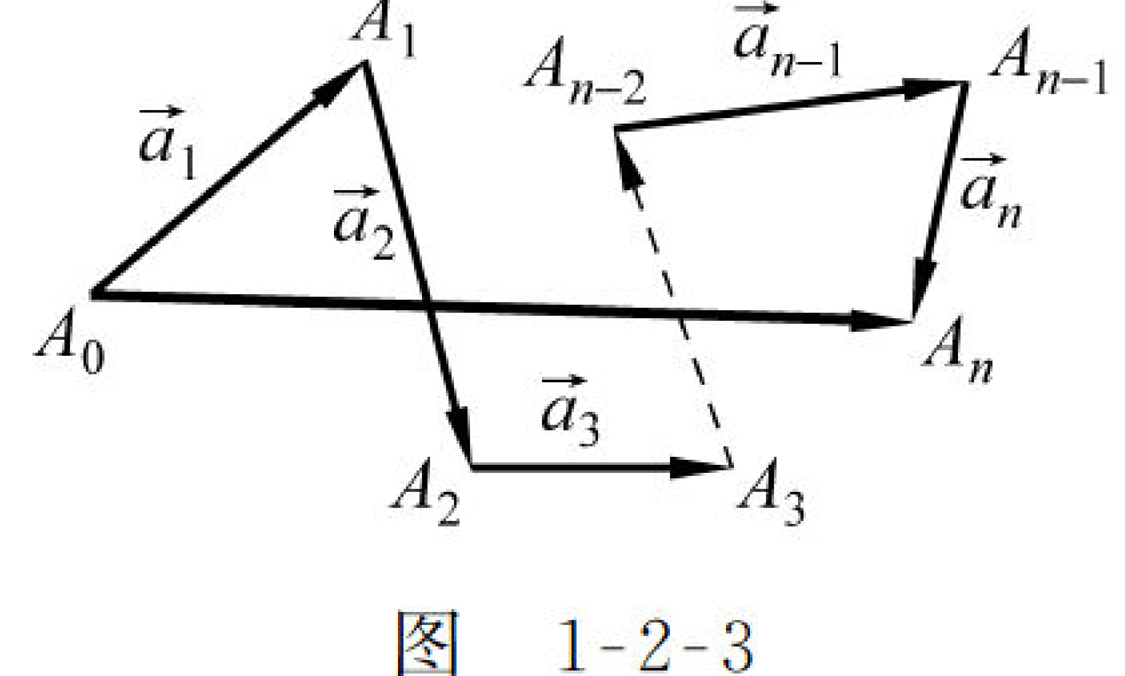


图 1-2-3

有了逆元后,我们可以定义向量的减法.

定义 1.2.3 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的减法运算定义为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

由加法的三角形法则可得减法三角形法则,如图 1-2-4 所示,取

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\quad \overrightarrow{AC}=\vec{b},$$

则 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$.

如图 1-2-5 所示,如果以 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 为邻边构成平行四边形 $ABCD$,则对角线

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}.$$

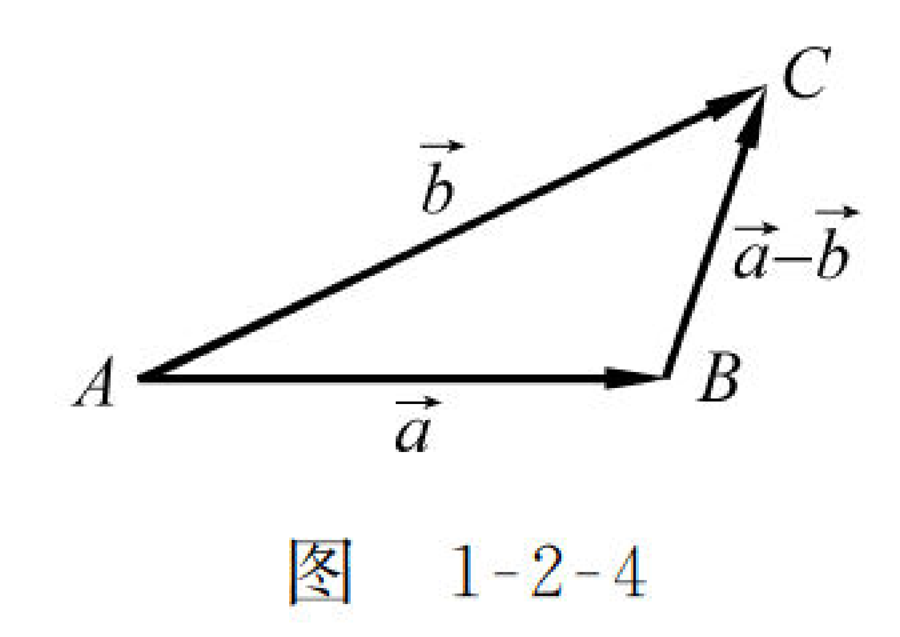


图 1-2-4

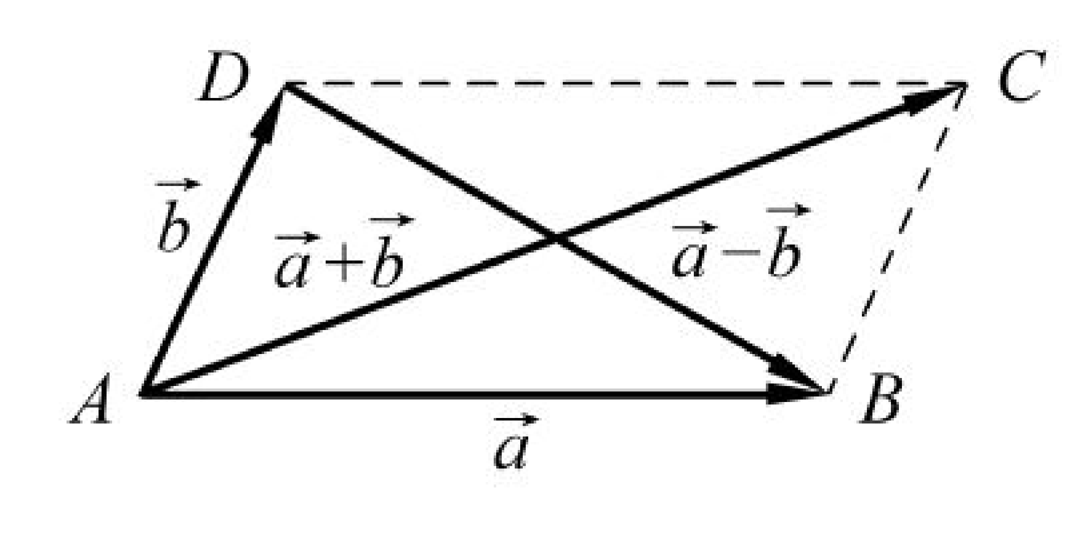


图 1-2-5

从而得到,对于任意两个向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$|\vec{a}\pm\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$. 推广到有限多个向量时亦有

$$|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n|\leqslant|\vec{a}_1|+|\vec{a}_2|+\cdots+|\vec{a}_n|.$$

2. 向量的数乘

定义 1.2.4 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\vec{a}$. 它的模 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$,它的方向规定:

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

我们把定义 1.2.4 给出的运算称为数量与向量的乘法,简称数乘. 数乘的几何解释为:伸长($\lambda>1$),缩短($0<\lambda<1$)与反向($\lambda<0$). 任一非零向量 $\vec{a}$ 的单位化为 $\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. 实因 $\vec{a}^0$ 与 $\vec{a}$ 同向,且 $|\vec{a}^0|=\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|}=1$.

定义 1.2.5 实数 λ 与向量 $\vec{a}=(x,y,z)$ 的乘积定义为

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

定义 1.2.4 与定义 1.2.5 是等价的,我们可以由方向与模来验证.

定理 1.2.2 向量的数乘运算具有下面的运算律.

(1) 单位元 $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

(2) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

(3) 分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

证 设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则由数的运算律知结论成立.

例 1.2.1 证明:不共线的三向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 能将其始点与终点顺次相连而成为一个三角形 $\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

证 ($\Rightarrow$)设不共线的三向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 能将其始点与终点顺次相

连而成为一个三角形,如图 1-2-6 所示,则由三角形法则知 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$,所以 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

(⇐)设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,作

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\quad \overrightarrow{BC}=\vec{b},$$

则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$,所以$\overrightarrow{AC}+\vec{c}=\vec{0}$,即$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$,故 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 能将其始点与终点顺次相连而成为一个三角形.

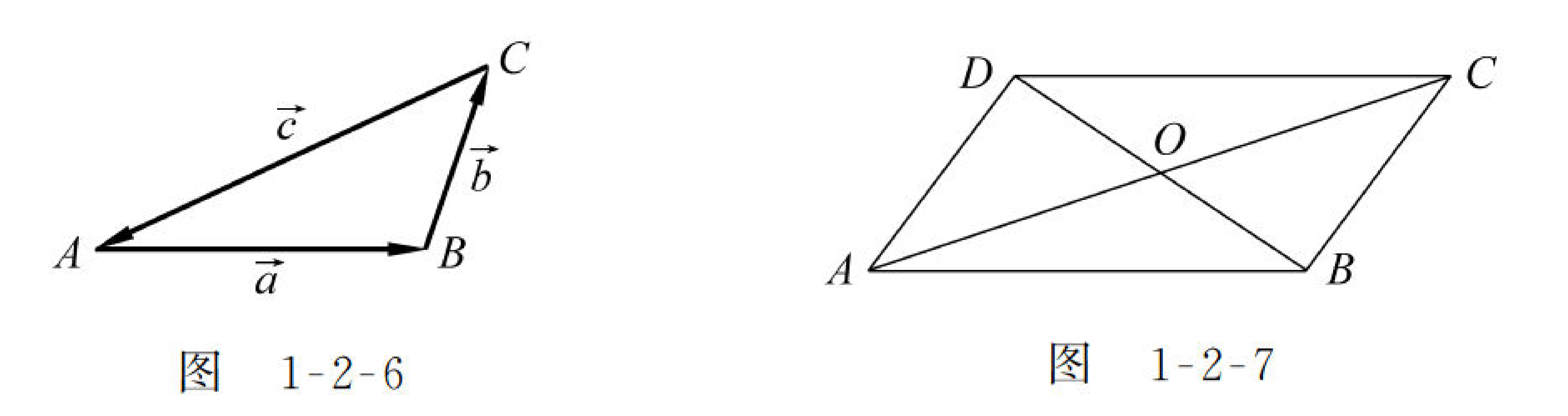


图 1-2-6　　图 1-2-7

例 1.2.2　用向量证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　如图 1-2-7 所示,设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于 O 点且互相平分,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}.$$

所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$,且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 1.2.3　设 AM 是$\triangle ABC$ 的中线,求证:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

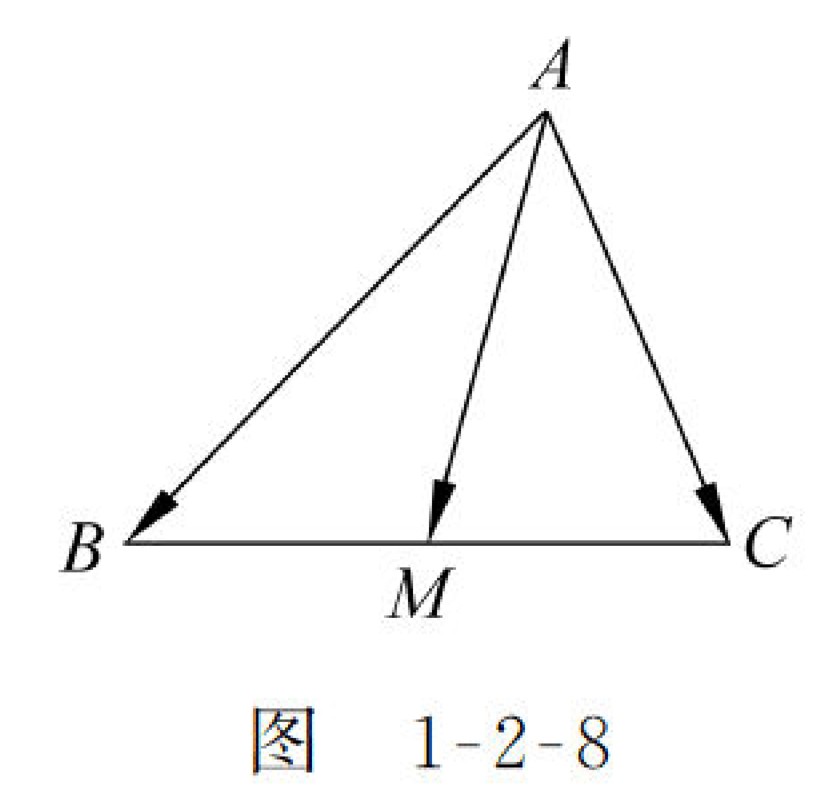


图 1-2-8

证　如图 1-2-8 所示,

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$

而$\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{CM}$,所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

例 1.2.4　用向量证明三角形两边的中点的连线平行于第三边且为第三边的一半.

证 如图1-2-9所示，

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以$\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{BC}$，且$|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

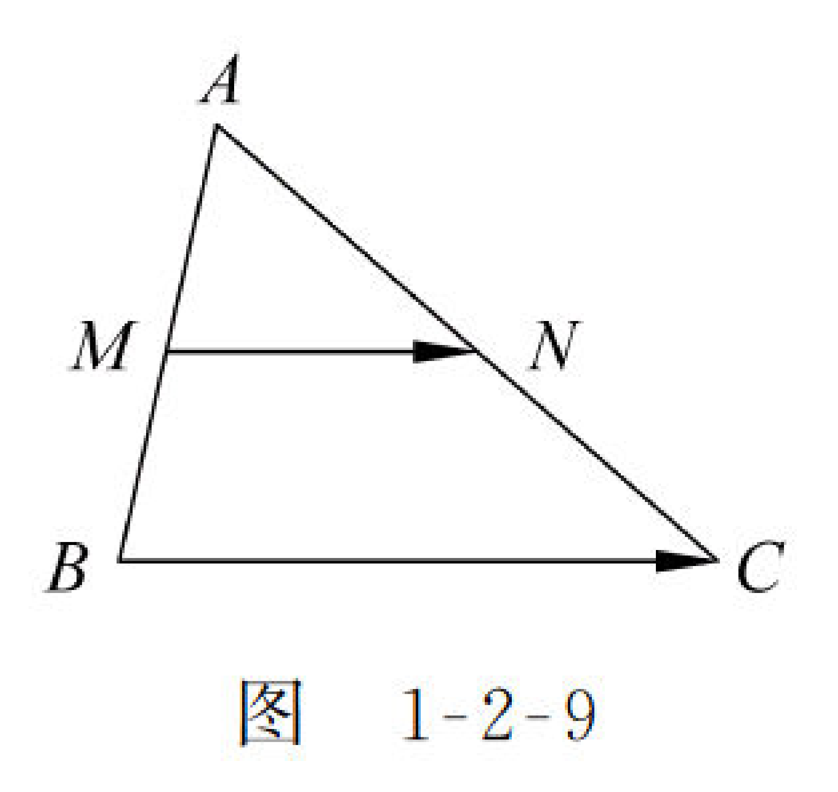


图 1-2-9

习 题 1.2

1. 要使下列各式成立，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$应满足什么条件？

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；　(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；　(4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(5) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

2. 试解下列各题.

(1) 化简$(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x+y)(\vec{a}-\vec{b})$；

(2) 已知$\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$，$\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，求$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$和$3\vec{a}-2\vec{b}$；

(3) 从向量方程组$\begin{cases}3\vec{x}+4\vec{y}=\vec{a},\\2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}\end{cases}$中解出向量$\vec{x}$，$\vec{y}$.

3. 已知四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{c}$，$\overrightarrow{CD}=5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$，对角线$AC$，$BD$的中点分别为$E$，$F$，求$\overrightarrow{EF}$.

4. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，证明：三点$A$，$B$，$D$共线.

5. 已知四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$，证明：四边形$ABCD$是梯形.

6. 设L，M，N分别是$\triangle ABC$三边BC，CA，AB的中点，证明：三中线向量$\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$可以构成一个三角形.

7. 设L，M，N是$\triangle ABC$三边的中点，O是任意一点，证明：

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

8. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心,O 是任意一点,证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

9. 在平行六面体 $ABCD\text{-}EFGH$ 中证明:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}.$$

10. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下两底边且等于它们长度和的一半.

11. 用向量法证明平行四边形对角线互相平分.

12. 设 O 点是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

13. 在上题条件下,设 P 是任意点,证明:

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}.$$

1.3 三元线性方程组与行列式

在向量的加与数乘中,常遇到三元一次方程组.例如,已知

$$\vec{a}=(2,3,5),\quad \vec{b}=(3,4,5),\quad \vec{c}=(6,7,8),$$

又 $\vec{r}=(7,8,9)$,$\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$,求 x,y,z.这样的问题就要求解线性方程组

$$\begin{cases}2x+3y+6z=7,\\3x+4y+7z=8,\\5x+5y+8z=9.\end{cases}$$

而行列式是求解线性方程组的工具,所以我们有必要在这里介绍行列式与线性方程组.

定义 1.3.1 关于 x,y,z 的一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

称为三元一次方程组或三元线性方程组.而三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

称为**三元齐次线性方程组**.

我们先从二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

入手,利用加减消元法得

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y = a_{21}b_1, \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2, \end{cases}$$

则当 $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了简化解的表达式,引入二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

并规定

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}.$$

即左上角的数与右下角的数的积取正,左下角的数与右上角的数的积取负,再取其和.

令 $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

这就是克莱姆法则,这个结论可以拓广到三元线性方程组,为此需要介绍三阶行列式的定义与性质.

定义 1.3.2 由 9 个数排成 3 行 3 列的表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**.

我们把 a_{ij} 称为行列式的**元素**,把行列式里的横排称为**行**,行列式里的纵排称为**列**. 并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

其是取于不同行不同列的三个元素的乘积的代数和. 为了便于记忆,如图 1-3-1 所示,三条实线所对应的三项为正,三条虚线所对应的三项为负. 值得注意的是,这种方法不能应用到四阶行列式上去. 因此,有必要给大家再介绍一种行列式的计算方法.

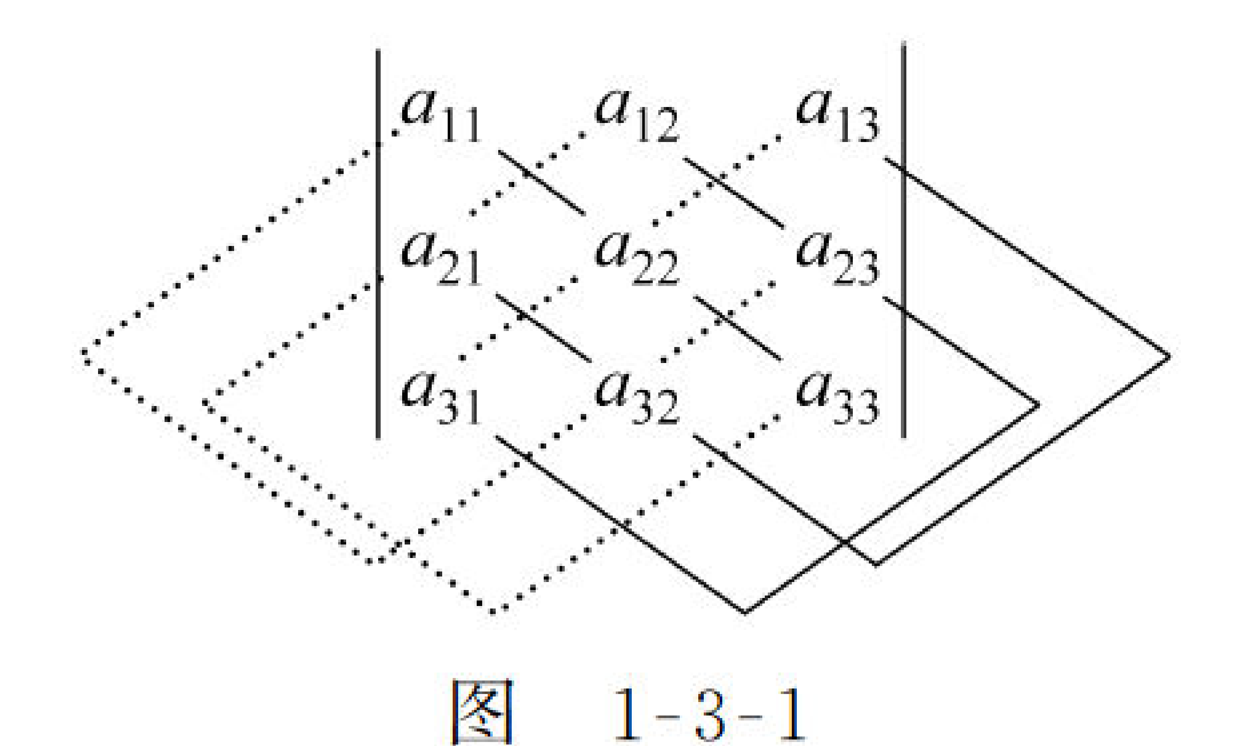


图 1-3-1

定义 1.3.3 在行列式中划去某个元素 a_{ij} 所在的行和列,剩下元素按原位置构成的行列式称为 a_{ij} 的**余子式**,余子式赋予符号 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij}.

例如在三阶行列式中 $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等,其共有 9 个代数余子式.

定理 1.3.1 三阶行列式可按一行(或一列)展开,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (\text{按第 1 行展开})$$
$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad (\text{按第 2 行展开})$$

$$=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}.\quad(\text{按第 3 行展开})$$

证 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

同理可证后面两个等式.

定理 1.3.1 的实质是把三阶行列式化为二阶行列式来计算.这个定理可推广,即可将四阶行列式按此法化为三阶行列式后再计算.

在行列式的计算中,如果知道行列式的一些性质,则对计算有很大的帮助.下面给出行列式的一些关于计算的性质.

性质 1.3.1 交换行列式的两行(列),行列式的绝对值不变,符号相反.

性质 1.3.2 数 k 乘行列式等于数 k 乘行列式的某一行(列)的每一个元素.反过来,行列式某一行(列)的公因数 k 可提到行列式前.

性质 1.3.3 如果行列式有两行(列)成比例,则行列式等于零.

性质 1.3.4 如果行列式某一行(列)为零,则行列式等于零.

性质 1.3.5 把行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)去,所得行列式与原行列式相等.

例 1.3.1 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix}3&9&21&6\\4&12&26&10\\2&9&20&5\\-1&2&-7&7\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 21 & 6 \\ 4 & 12 & 26 & 10 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}$

$=6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}$ （利用性质 1.3.2）

$=6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ （利用性质 1.3.5）

$=6\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ （利用定理 1.3.1）

$=6\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}=-48.$

例 1.3.2 证明 $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$

证 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

定理 1.3.2 对于 x,y,z 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3, \end{cases}$$

如果由其一次项系数构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组有唯一解,其解为

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}.$$

其中

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

对于定理 1.3.2 的证明,我们将在 1.9 节中给出.

推论 三元齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases}$ 只有零解$\Leftrightarrow$系数行列式 $D\neq 0$.

习 题 1.3

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 36 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式解线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 3x-2y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-3, \\ x+3y-2z=-6. \end{cases}$

3. 已知 $\vec{a}=(2,3,5)$，$\vec{b}=(3,4,5)$，$\vec{c}=(6,7,8)$，又 $\vec{r}=(7,8,9)$，且 $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，求 x,y,z.

1.4 向量组的线性关系

1. 线性相关与线性无关

向量的加法运算与数乘运算统称为**线性运算**，运算的结果仍是向量.

定义 1.4.1 设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 是 n 个向量，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个实数，表达式 $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$ 称为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的**线性组合**.

如果向量 $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$，则称向量 $\vec{a}$ 可经向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性表出，记作：$\vec{a}\to\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\}$，也可称 $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$ 是 $\vec{a}$ 的线性分解式.

定义 1.4.2 设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 是 n 个向量，如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0},$$

则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ **线性相关**. 否则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ **线性无关**，即只有当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时，$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$ 才成立，则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性无关.

ie：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow\exists^0\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

$$\ni \text{“}\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}\text{”}.$$

而 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$，只有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 才成立.

显然，一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

定理 1.4.1　向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n(n\geqslant 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 有一个向量可经其余向量线性表出.

证　$(\Rightarrow)$ 设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性相关，则 $\exists^0\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

$$\ni \text{“}\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}\text{”},$$

不妨设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\vec{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n$，即

$$\vec{a}_1\rightarrow\{\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\}.$$

$(\Leftarrow)$ 如果有一个向量可经其余向量线性表出. 不妨设 $\vec{a}_1\rightarrow\{\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\}$，则 $\vec{a}_1=\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$，于是

$$\vec{a}_1-\lambda_2\vec{a}_2-\cdots-\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

由于表出系数不全为零，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性相关.

推论 1　部分线性相关，则整体线性相关.

证　在向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s,\cdots,\vec{a}_n$ 中，不妨设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$ 线性相关，则存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使得

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_s\vec{a}_s=\vec{0},$$

从而 $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_s\vec{a}_s+0\vec{a}_{s+1}+\cdots+0\vec{a}_n=\vec{0}$，所以结论成立.

推论 2　含有零向量的向量组必线性相关.

定理 1.4.2　如果向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性无关，且向量

$$\vec{a}\rightarrow\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\},$$

则表出系数唯一.

证　假设存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\lambda_1',\lambda_2',\cdots,\lambda_n'$，使得

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n,\quad \vec{a}=\lambda_1'\vec{a}_1+\lambda_2'\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n'\vec{a}_n,$$

则两式相减得

$$(\lambda_1-\lambda_1')\vec{a}_1+(\lambda_2-\lambda_2')\vec{a}_2+\cdots+(\lambda_n-\lambda_n')\vec{a}_n=\vec{0}.$$

由向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性无关知

$$\lambda_1=\lambda_1',\quad \lambda_2=\lambda_2',\quad \cdots,\quad \lambda_n=\lambda_n',$$

所以结论成立.

定理 1.4.3 设

$$\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\quad \vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2),\quad \vec{a}_3=(x_3,y_3,z_3),$$

则

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\ \text{线性相关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

证 因为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关$\Leftrightarrow \exists^0 x,y,z,$

$$\ni\text{“}x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+z\vec{a}_3=\vec{0}\text{”}$$

$$\Leftrightarrow\text{线性方程组}\begin{cases}x_1x+x_2y+x_3z=0,\\ y_1x+y_2y+y_3z=0,\\ z_1x+z_2y+z_3z=0\end{cases}\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

故结论成立.

定理 1.4.4 若 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关,且

$$\vec{b}_1=k_{11}\vec{a}_1+k_{21}\vec{a}_2+k_{31}\vec{a}_3,$$
$$\vec{b}_2=k_{12}\vec{a}_1+k_{22}\vec{a}_2+k_{32}\vec{a}_3,$$
$$\vec{b}_3=k_{13}\vec{a}_1+k_{23}\vec{a}_2+k_{33}\vec{a}_3,$$

则

$$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\ \text{线性相关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{vmatrix}=0.$$

证 因为 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 线性相关$\Leftrightarrow \exists^0 x,y,z,$

$$\ni\text{“}x\vec{b}_1+y\vec{b}_2+z\vec{b}_3=\vec{0}\text{”},$$

即

$$(k_{11}x+k_{12}y+k_{13}z)\vec{a}_1+(k_{21}x+k_{22}y+k_{23}z)\vec{a}_2$$
$$+(k_{31}x+k_{32}y+k_{33}z)\vec{a}_3=\vec{0}.$$

因为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关,所以

$$\begin{cases}k_{11}x+k_{12}y+k_{13}z=0\\k_{21}x+k_{22}y+k_{23}z=0\\k_{31}x+k_{32}y+k_{33}z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{vmatrix}=0.$$

故结论成立.

定理 1.4.5 在$\mathbb{R}^3$中,任意 4 个向量必线性相关.

证 设$\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

$$\vec{a}_3=(x_3,y_3,z_3),\vec{a}_4=(x_4,y_4,z_4)$$

是$\mathbb{R}^3$中的任意 4 个向量,由 $x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+z\vec{a}_3+w\vec{a}_4=\vec{0}$ 得线性方程组

$$\begin{cases}x_1x+x_2y+x_3z+x_4w=0,\\y_1x+y_2y+y_3z+y_4w=0,\\z_1x+z_2y+z_3z+z_4w=0.\end{cases}$$

因为线性方程组中未知元的个数多于方程的个数,所以必有非零解,结论成立.

定理 1.4.6 在$\mathbb{R}^3$中,若向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关,则$\mathbb{R}^3$中的任一向量 $\vec{a}$ 都可经 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表出.

证 因为 $\vec{a},\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关,所以 $\exists^0 k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{R}$,

$$\ni\text{“}k_1\vec{a}+k_2\vec{a}_1+k_3\vec{a}_2+k_4\vec{a}_3=\vec{0}\text{”},$$

如果 $k_1=0$,则由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关得 $k_2=k_3=k_4=0$,此与 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零矛盾. 故 $k_1\neq0$,于是

$$\vec{a}=-\frac{k_2}{k_1}\vec{a}_1-\frac{k_3}{k_1}\vec{a}_2-\frac{k_4}{k_1}\vec{a}_3,$$

故结论成立.

例 1.4.1 设 $\vec{\varepsilon}_1=(1,0,0),\vec{\varepsilon}_2=(0,1,0),\vec{\varepsilon}_3=(0,0,1)$,则 $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3$ 线性无关.

证 因为$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$,所以$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3$线性无关.

例 1.4.2 设$\vec{a}_1=(1,0,0),\vec{a}_2=(1,1,0),\vec{a}_3=(1,1,1)$,证明$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性无关.

证 因为$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq0$,所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性无关.

例 1.4.3 设$\vec{a}_1=(1,2,1),\vec{a}_2=(1,1,0),\vec{a}_3=(0,1,1)$,证明$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关.

证 因为$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0$,所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关.

2. 几何解释

定理 1.4.7 两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$共线$\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$线性相关.

证 ($\Rightarrow$)设$\vec{a},\vec{b}$共线,则$\vec{a}$可由$\vec{b}$伸长、缩短或反向而得到,即$\exists x\in\mathbb{R}$,$\ni$“$\vec{a}=x\vec{b}$”,所以$\vec{a}-x\vec{b}=\vec{0}$,故$\vec{a},\vec{b}$线性相关.

($\Leftarrow$)设$\vec{a},\vec{b}$线性相关,则存在不全为零的数k_1,k_2,

$$\ni\text{“}k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}\text{”},$$

不妨设$k_1\neq0$,则$\vec{a}=-\dfrac{k_2}{k_1}\vec{b}$,所以$\vec{a},\vec{b}$共线.

定理 1.4.8 三个非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}$线性相关.

证 ($\Rightarrow$)设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面,则其中必有一个向量经另外两个向量线性表出,即$\exists^0 k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$,$\ni$“$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$”,故$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$线性相关.

($\Leftarrow$)设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$线性相关,则$\exists^0 k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$,

$$\ni\text{“}k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}\text{”},$$

不妨设 $k_1\neq0$，则 $\vec a=-\dfrac{k_2}{k_1}\vec b-\dfrac{k_3}{k_1}\vec c$，故 $\vec a,\vec b,\vec c$ 共面.

推论　两个向量 $\vec e_1,\vec e_2$ 线性无关，则

$$向量\ \vec a\ 与\ \vec e_1,\vec e_2\ 共面\Leftrightarrow\vec a\to\{\vec e_1,\vec e_2\}.$$

证　向量 $\vec a$ 与 $\vec e_1,\vec e_2$ 共面 $\Leftrightarrow\vec a,\vec e_1,\vec e_2$ 线性相关

$$\Leftrightarrow\vec a\to\{\vec e_1,\vec e_2\}.$$

例 1.4.4　证明四面体对边中点的连线交于一点且互相平分.

证　如图 1-4-1 所示，在四面体 $ABCD$ 中，一组对边 AB,CD 的中点 E,F 的连线 EF 的中点为 P_1，其余两组对边中点连线的中点为 P_2,P_3. 取 $\overrightarrow{AB}=\vec e_1,\overrightarrow{AC}=\vec e_2,\overrightarrow{AD}=\vec e_3$，则在 $\triangle AEF$ 中，

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}),$$

图　1-4-1

在 $\triangle ACD$ 中，

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\vec e_1+\vec e_2),$$

从而

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\vec e_1+\frac{1}{2}(\vec e_2+\vec e_3)\right]=\frac{1}{4}(\vec e_1+\vec e_2+\vec e_3).$$

同理可证

$$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{4}(\vec e_1+\vec e_2+\vec e_3),\quad \overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}(\vec e_1+\vec e_2+\vec e_3),$$

所以 $\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3}$，故 P_1,P_2,P_3 三点重合，结论成立.

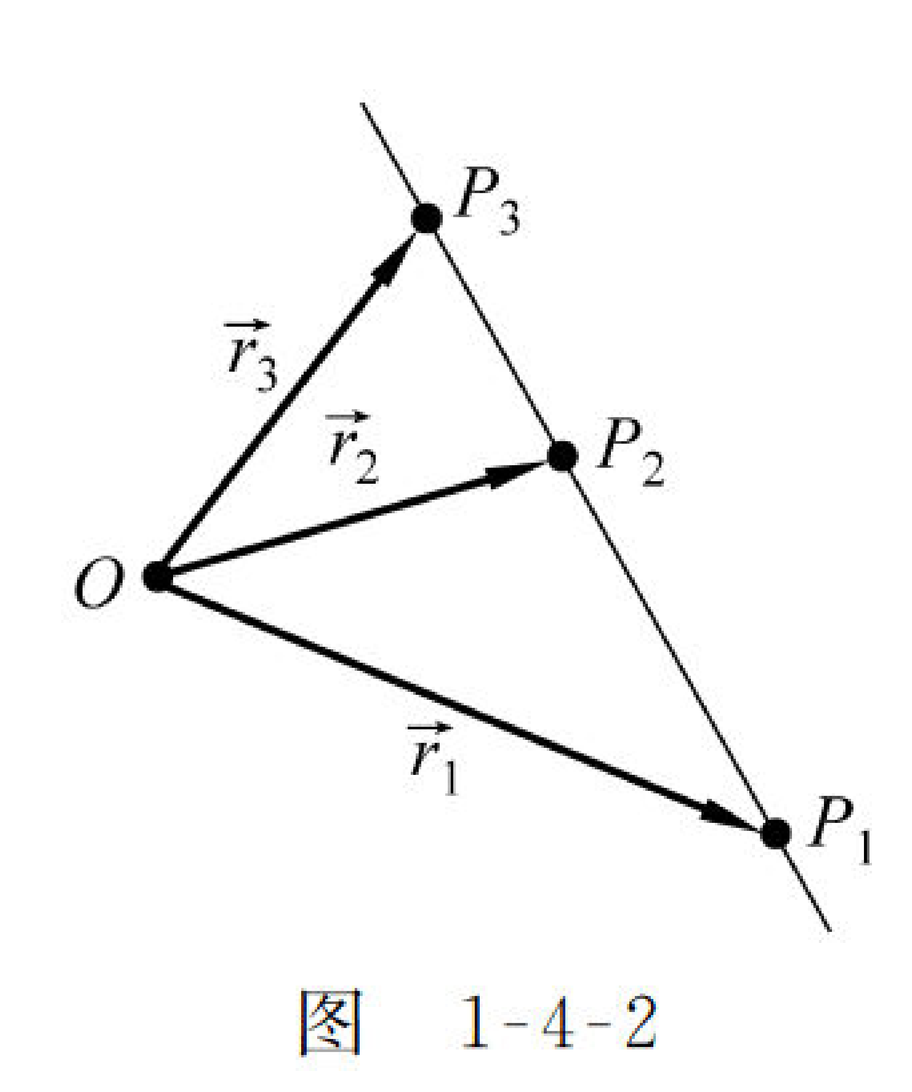


图　1-4-2

例 1.4.5　设 $\overrightarrow{OP_1}=\vec r_1,\overrightarrow{OP_2}=\vec r_2,\overrightarrow{OP_3}=\vec r_3$，证明：

P_1,P_2,P_3 三点共线 $\Leftrightarrow\exists^0\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$，$\ni$“$\lambda_1\vec r_1+\lambda_2\vec r_2+\lambda_3\vec r_3=\vec 0$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$”.

证　($\Rightarrow$)如图 1-4-2 所示，设 P_1,P_2，

P_3 三点共线，则$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$共线，即

$$\exists^0 m,n \in \mathbb{R}, \ni \text{“} m\,\overrightarrow{P_1P_2} + n\,\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{0} \text{”}.$$

于是 $m(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+n(\vec{r}_3-\vec{r}_2)=\vec{0}$，从而

$$-m\vec{r}_1 + (m-n)\vec{r}_2 + n\vec{r}_3 = \vec{0},$$

取 $\lambda_1=-m$，$\lambda_2=m-n$，$\lambda_3=n$，则

$$\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 = \vec{0}, \quad 且 \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

($\Leftarrow$) 设 $\exists^0\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$，

$$\ni \text{“}\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 = \vec{0}, \quad 且 \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\text{”}.$$

不妨设 $\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$，则 $\lambda_1(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\lambda_2(\vec{r}_3-\vec{r}_2)=\vec{0}$. 由 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$ 知 λ_1，λ_2 不全为零，所以$\overrightarrow{P_3P_1}$，$\overrightarrow{P_3P_2}$共线，故 P_1，P_2，P_3 三点共线.

习　题　1.4

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中：

(1) 对角线$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$；

(2) 设边 BC，CD 的中点为 M，N，且 $\overrightarrow{AM}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AN}=\vec{q}$，求$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$.

2. 如图 1-4-3 所示，在平行六面体 $ABCD-EFGH$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\vec{e}_2$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}_3$，三个面上的对角线$\overrightarrow{AC}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AH}=\vec{q}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{r}$，试把向量 $\vec{a}=\lambda_1\vec{p}+\lambda_2\vec{q}+\lambda_3\vec{r}$ 写成 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 的线性组合.

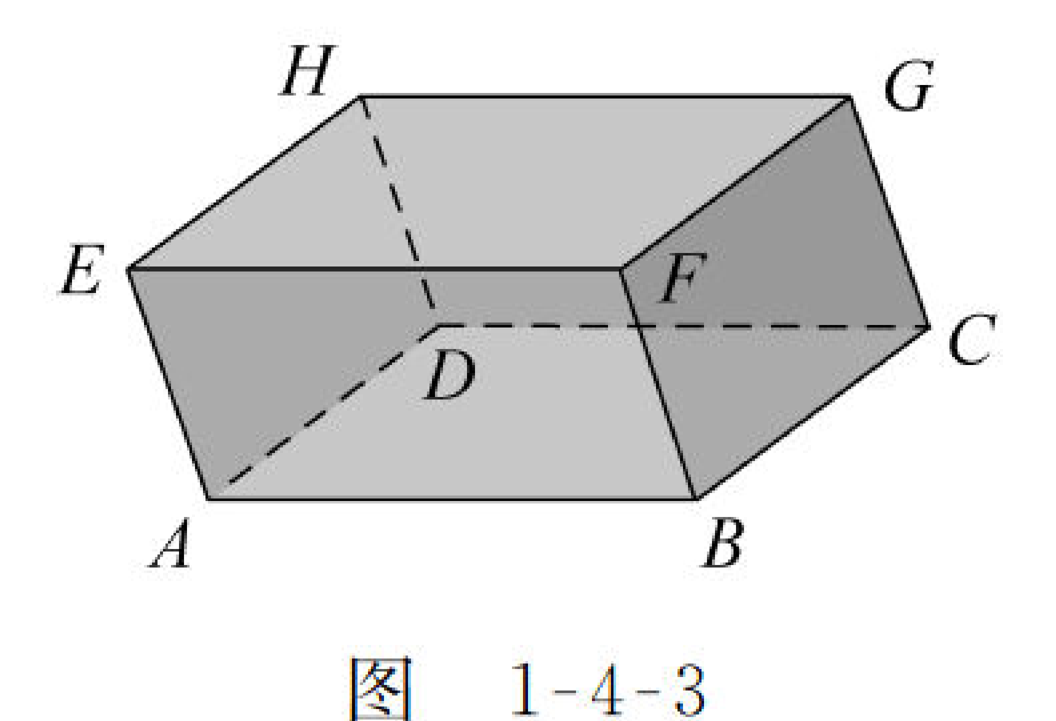


图　1-4-3

图　1-4-4

3. 如图 1-4-4 所示，设一直线上的三点 A,B,P 满足

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}\quad(\lambda\neq-1),$$

O 是空间任意一点，求证：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

4. 在$\triangle ABC$ 中，设

$$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1,\quad \overrightarrow{AC}=\vec{e}_2.$$

(1) 设 D,E 是边 BC 的三分点，将向量$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$分解为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 的线性组合.

(2) 设$\angle A$ 的平分线 AT 交 BC 于 T，将向量$\overrightarrow{AT}$分解为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 的线性组合.

5. 在四边形 $OABC$ 中，设点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，求向量$\overrightarrow{OG}$关于$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的分解式.

6. 用向量法证明：

(1) 三角形三条中线共点；

(2) P 是$\triangle ABC$ 的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

7. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，问 $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$ 是否线性相关？

8. 证明三个向量 $\vec{a}=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，$\vec{b}=4\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，$\vec{c}=-3\vec{e}_1+12\vec{e}_2+11\vec{e}_3$ 共面，其中 $\vec{a}$ 是否经 $\vec{b},\vec{c}$ 线性表出. 如能，请写出线性表出式.

9. 证明三个向量 $\lambda\vec{a}-\mu\vec{b}$，$\mu\vec{b}-\nu\vec{c}$，$\nu\vec{c}-\lambda\vec{a}$共面.

10. 设$\overrightarrow{OP_i}=\vec{r}_i(i=1,2,3,4)$，证明：

$$P_1,P_2,P_3,P_4\text{ 四点共面}\Leftrightarrow\exists^0\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R},$$

$$\ni\text{“}\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3+\lambda_4\vec{r}_4=\vec{0}\text{，且 }\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\text{”}.$$

1.5 标架与坐标

1. 标架与坐标的概念

由 1.4 节的学习，我们知道，在$\mathbb{R}^3$中，任意 4 个向量必线性相关. 在$\mathbb{R}^3$中，任意取一定点 O，此点称为**原点**. 由原点 O 引 3 个线性无关

的向量$\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$，$\overrightarrow{OE_3}=\vec{e}_3$，那么$\forall \vec{r}\in\mathbb{R}^3$，$\exists x,y,z$，$\ni$"$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$"，而且表出系数$x,y,z$唯一. 这样，$\mathbb{R}^3$中的任一向量就与三元有序数组$(x,y,z)$构成一一对应. 这就是我们在$\mathbb{R}^3$中建立标架的基础.

定义 1.5.1 在$\mathbb{R}^3$中，取一定点O与3个线性无关的有序向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$构成的集合称为$\mathbb{R}^3$的一个**标架**，记作$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. 如果向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$是单位向量，则称$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为**笛卡儿标架**，如果向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$又两两互相垂直，则称$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为**笛卡儿直角标架**. 在一般情况下，称$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为**仿射标架**.

例如取$\vec{i}=(1,0,0)$，$\vec{j}=(0,1,0)$，$\vec{k}=(0,0,1)$，则

$$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$$

就是一个笛卡儿直角标架.

对于标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$，如果分别用拇指、食指、中指表示$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$，与右手对应的就称为**右旋标架**，与左手对应的就称为**左旋标架**. 在这里，我们常用的是右旋标架.

定义 1.5.2 建立标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$后，$\forall\vec{r}$，$\exists | x,y,z$，

$$\ni\text{“}\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3\text{”},$$

有序数组(x,y,z)称为$\vec{r}$在标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下的**坐标**. 当标架选定后，可记$\vec{r}=(x,y,z)$.

对于空间中任意一点P，称向量$\overrightarrow{OP}$为P点的向径，向径$\overrightarrow{OP}$在标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下的坐标$(x,y,z)$称为$P$点的坐标. 记作$P(x,y,z)$.

由前面两个定义可以看出，标架是人为的. 也就是说，我们就问题可以选择适合问题的标架来处理. 当标架建立后，任一自由向量就可以由某一点P的向径$\overrightarrow{OP}$唯一确定. 而P点又由三元有序数组(x,y,z)唯一确定. 这样，我们就得到了"点"、"数"、向量的对应关系，从而就可以用"数"去研究"形"，用"形"来解释"数"，向量就是研究中的工具.

就仿射标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$，我们应该注意到这个标架是倾斜的，也就是所谓的"斜坐标系". 由于我们把几何性质分为两类，即度

量性质与仿射性质，所以为了讨论问题方便，就出发点不同就应该建立不同的标架来完成任务.

什么叫度量性质呢？涉及点与点之间的距离或线与线之间的夹角的性质称为度量性质. 如三角形的全等，两条直线垂直等性质. 也可以说：在正交变换下不变的性质称为度量性质.

什么叫仿射性质呢？涉及共线或共面的性质称为仿射性质. 仿射性质的特点是这些性质只需要线性运算就可以证明. 如三角形三条中线交于一点等，只要线性运算就能证明，所以是仿射性质. 也可以说：在仿射变换下不变的性质称为仿射性质. 关于正交变换与仿射变换，在以后的课程中再解释.

2. 仿射坐标系下的线性运算

当我们选定仿射标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$后，向量的线性运算是否还可以由它的坐标运算而获得呢？回答是肯定的，这就是下面的定理.

定理 1.5.1　两向量和的坐标等于两向量坐标的和. 即 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

证　因为 $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$，$\vec{b}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3$，所以

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)+(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)\\&=(x_1+x_2)\vec{e}_1+(y_1+y_2)\vec{e}_2+(z_1+z_2)\vec{e}_3,\end{aligned}$$

故 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

定理 1.5.2　数乘向量等于数乘向量的坐标. 即 $\vec{a}=(x,y,z)$，则

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

证　因为 $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$，所以

$$\lambda\vec{a}=\lambda(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)=\lambda x\vec{e}_1+\lambda y\vec{e}_2+\lambda z\vec{e}_3,$$

故 $\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.

定理 1.5.3　向量的坐标等于其终点坐标减去始点坐标.

证　设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点与终点为

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2),$$

则$\overrightarrow{OP_1}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$,$\overrightarrow{OP_2}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3$,于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\\ &=(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)-(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)\\ &=(x_2-x_1)\vec{e}_1+(y_2-y_1)\vec{e}_2+(z_2-z_1)\vec{e}_3,\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

在仿射标架下,同样有下面的结论.

定理 1.5.4 设两非零向量 $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2\text{ 共线}\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

证 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 共线$\Leftrightarrow\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性相关$\Leftrightarrow\exists\lambda$, $\ni$“$\lambda\vec{a}_1=\vec{a}_2$”,即

$$(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1).$$

故

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2\text{ 共线}\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

定理 1.5.5 设

$$\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\quad \vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2),\quad \vec{a}_3=(x_3,y_3,z_3),$$

则

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\text{ 共面}\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

证 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 共面$\Leftrightarrow\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \exists^0 x,y,z,\ni\text{“}x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+z\vec{a}_3=\vec{0}\text{”}$$

$$\Leftrightarrow\text{线性方程组}\begin{cases}x_1x+x_2y+x_3z=0,\\ y_1x+y_2y+y_3z=0,\\ z_1x+z_2y+z_3z=0\end{cases}\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

故结论成立.

例 1.5.1 对于有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$,如果点 P 满足$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,我们就称点 P 把有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$分为定比是 λ 的分点. 如图 1-5-1 所示,当$\lambda>0$ 时,$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$同向,此时分点 P 位于线段 P_1P_2 的内部. 当 $\lambda<0$ 时,$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$反向,此时分点 P 位于线段 P_1P_2 的外部,且 $-1<\lambda<0$ 时,分点位于始点方的外部;$\lambda<-1$ 时,分点位于终点方的外部. 值得注意的是,$\lambda\neq-1$. 否则由$\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$得$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{P_2P}$,即 $P_1=P_2$,此与 $P_1\neq P_2$ 矛盾.

$P(-1<\lambda<0)$ $P(\lambda>0)$ $P(\lambda<-1)$

P_1 P_2

图 1-5-1

定理 1.5.6 设有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点与终点分别为

$$P_1(x_1,y_1,z_1),\quad P_2(x_2,y_2,z_2),$$

则定比为 λ 的分点 $P(x,y,z)$的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证 因为$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,所以

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

故 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$,$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$,$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

当 $\lambda=1$ 时,即得中点坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 1.5.2 已知三角形的三个顶点为

$$A(x_1,y_1,z_1),\quad B(x_2,y_2,z_2),\quad C(x_3,y_3,z_3),$$

求$\triangle ABC$ 的重心(三条中线的交点)坐标.

解 设 BC 边的中点为 E,则 E 点的坐标为

$$E\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2},\frac{z_2+z_3}{2}\right).$$

设重心为 $G(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AG}=2\,\overrightarrow{GE}$，于是

$$x-x_1=2\left(\frac{x_2+x_3}{2}-x\right),\quad y-y_1=2\left(\frac{y_2+y_3}{2}-y\right),$$

$$z-z_1=2\left(\frac{z_2+z_3}{2}-z\right),$$

即 $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$，$z=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$为所求.

习　题　1.5

1. 在标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下，试绘出 $P(2,2,1)$，$Q(-1,-1,3)$两点位置.

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，求点 A，D 与向量$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DB}$在标架$\{C;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\}$下的坐标.

3. 设 $\vec{a}=(1,5,2)$，$\vec{b}=(0,-3,4)$，$\vec{c}=(-2,3,-1)$，求 $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ 的坐标.

4. 证明三角形三条角平分线交于一点.

5. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$和 $D(5,-2,0)$三等分，求线段 AB 的端点的坐标.

6. 证明：四面体每一个顶点到对面重心所连的线段共点，且这点到顶点的距离是它到重心的距离的三倍. 用四面体的顶点坐标把交点坐标表示出来.

7. 已知空间四边形 $ABCD$，将 AB，AD，CD，CB 以相同比分之，证明这四个分点构成一个平行四边形.

8. 在四面体中，不相交的两条棱称为对棱，每一对对棱的中点连线称为四面体的拟中线. 证明：四面体的三条拟中线交于它的重心，且此重心把每一条拟中线分为长度相等的两部分.

1.6　两向量的数量积

前面我们讨论了向量的线性运算性质，用它解决“形”中的平行、比例、共点、共线、共面等是很方便的. 但是用这些性质就不便讨论“形”中的度量问题，如长度、夹角等. 并且讨论度量性质时，采用仿射标架是不方便的. 这里，我们采用的是直角坐标系.

1. 射影

定义 1.6.1　今给出空间一点 A 与一轴 $\vec{l}$，过 A 点作垂直于轴 $\vec{l}$ 的平面 α 与 $\vec{l}$ 交于 A'，则称 A' 为 A 点在轴 $\vec{l}$ 上的**射影**.

定义 1.6.2　如图 1-6-1 所示，今给出空间一向量 $\overrightarrow{AB}$ 与一轴 $\vec{l}$，点 A' 与 B' 为 A 与 B 在 $\vec{l}$ 上的射影，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\vec{l}$ 上的**射影向量**，记作：射影向量$_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}$，即

$$\text{射影向量}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

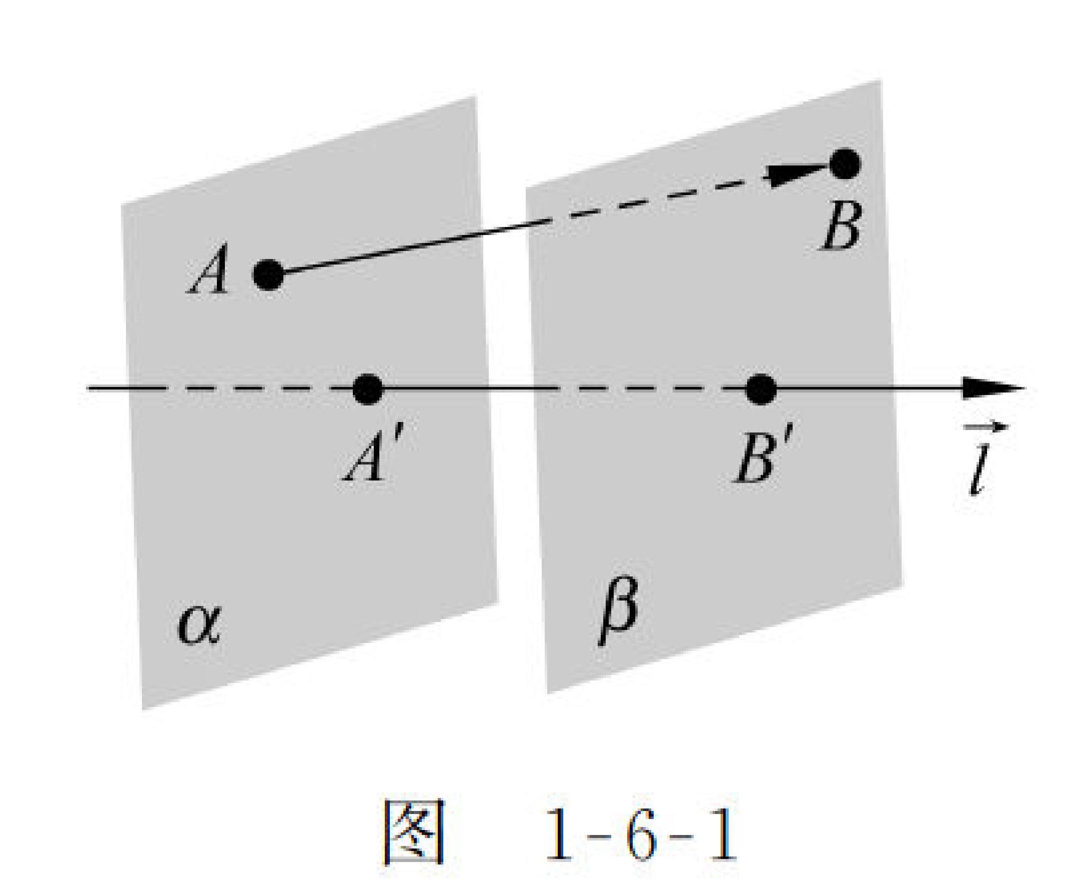


图　1-6-1

如果轴 $\vec{l}$ 的单位向量为 $\vec{e}$，则射影向量$_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=x\vec{e}$，这里 x 称为 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\vec{l}$ 上的射影，记作：射影$_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}$，即

$$\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=x.$$

ie：射影向量$_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=(\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB})\vec{e}$.

显然，射影$_{\vec{e}}\ \overrightarrow{AB}$ 跟 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角有关，且

$$\overrightarrow{AB}\ \text{与}\ \vec{e}\ \text{垂直} \Leftrightarrow \text{射影}_{\vec{e}}\ \overrightarrow{AB}=0.$$

规定　把两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的始点归结为一点 O，$\vec{a},\vec{b}$ 所在射线 OA，OB 构成的角度在 0 到 π 之间的角称为两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角，记作 $\angle(\vec{a},\vec{b})$.

按规定，如果 $\vec{a},\vec{b}$ 同向，则 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$，如果 $\vec{a},\vec{b}$ 反向，则

$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$，如果 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，则 $0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi$.

定理 1.6.1 射影$_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,\theta=\angle(\vec{l},\overrightarrow{AB})$.

证 如图 1-6-2 所示，平移$\overrightarrow{AB}$与 $\vec{l}$ 相交于 A，则

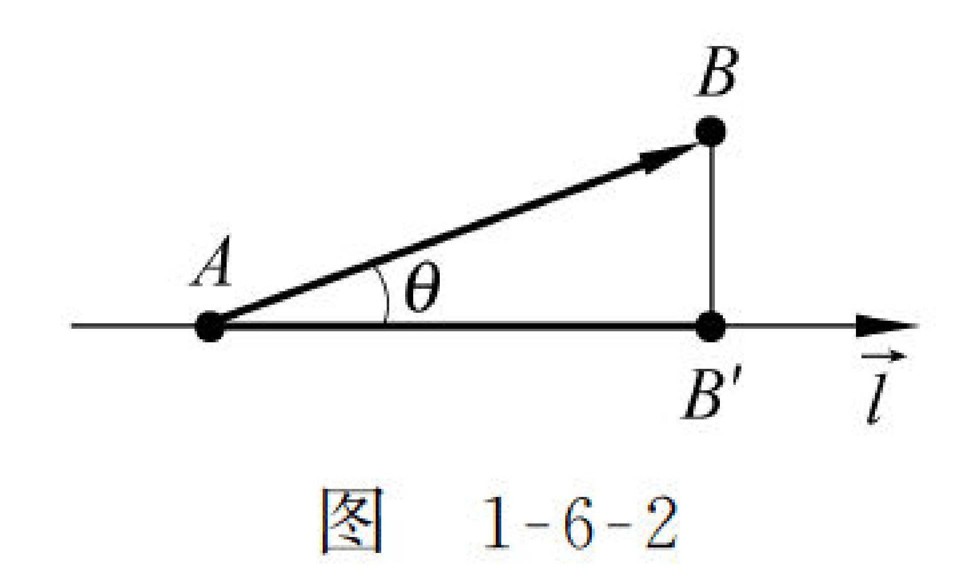


图 1-6-2

$$\text{射影向量}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}.$$

于是当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{AB}\perp\vec{l}$，

$$\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=0;$$

当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{AB}$与 $\vec{l}$ 同向，

$$\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta;$$

当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\overrightarrow{AB}$与 $\vec{l}$ 反向，

$$\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=-|\overrightarrow{AB'}|=-|\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-\theta)=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

从而 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，总有

$$\text{射影}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

定理 1.6.2 $\forall\vec{a},\vec{b}$，射影$_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b})=$射影$_{\vec{l}}\vec{a}+$射影$_{\vec{l}}\vec{b}$.

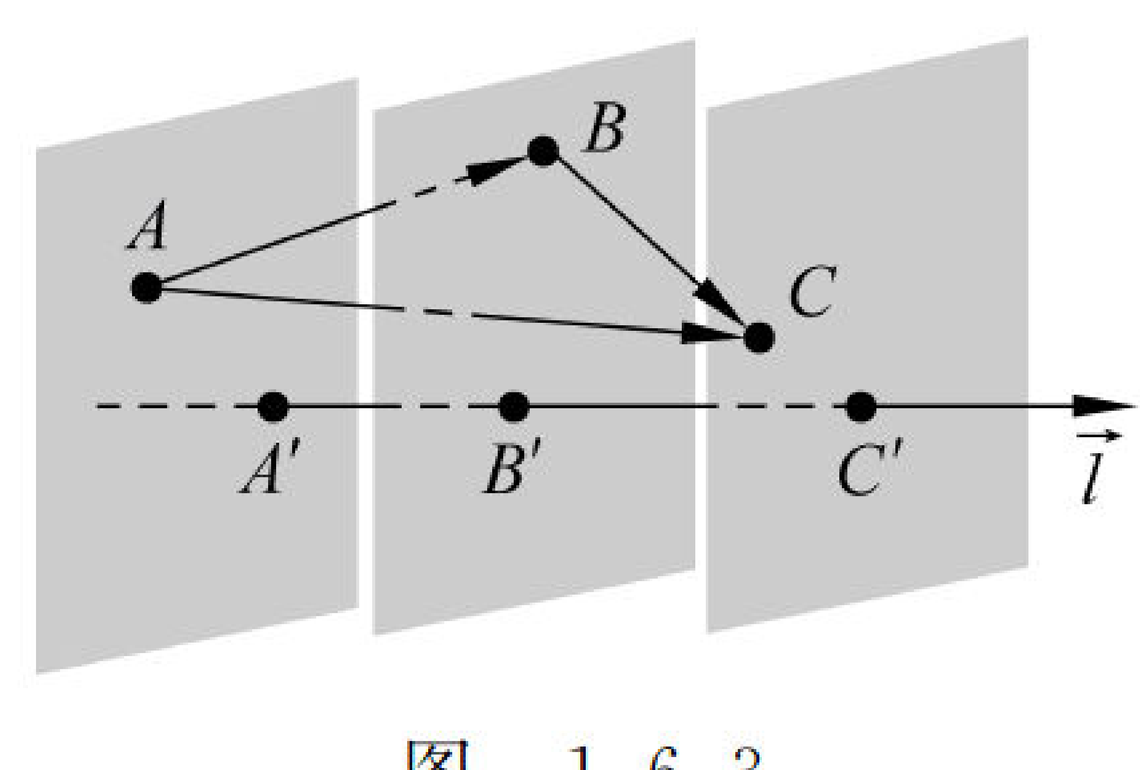


图 1-6-3

证 如图 1-6-3 所示，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，于是$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$. 因为

$$\overrightarrow{A'C'}=\text{射影向量}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{A'B'}=\text{射影向量}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{B'C'}=\text{射影向量}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{BC},$$

所以射影向量$_{\vec{l}}\overrightarrow{AC}=$射影向量$_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}+$射影向量$_{\vec{l}}\overrightarrow{BC}$. 故

$$\text{射影}_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b})=\text{射影}_{\vec{l}}\vec{a}+\text{射影}_{\vec{l}}\vec{b}.$$

定理 1.6.3 $\forall\vec{a},\forall\lambda\in\mathbb{R}$，射影$_{\vec{l}}(\lambda\vec{a})=\lambda\cdot$射影$_{\vec{l}}\vec{a}$.

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，则结论成立. 当 $\lambda\neq0$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，若 $\lambda>0$，则$\angle(\vec{l},\lambda\vec{a})=\angle(\vec{l},\vec{a})=\theta$，所以

$$\text{射影}_{\vec{l}}(\lambda\vec{a})=|\lambda\vec{a}|\cos\theta=\lambda|\vec{a}|\cos\theta=\lambda\ \text{射影}_{\vec{l}}\vec{a}.$$

若 $\lambda<0$，则 $\angle(\vec{l},\lambda\vec{a})=\pi-\angle(\vec{l},\vec{a})=\pi-\theta$，所以

$$射影_{\vec{l}}(\lambda\vec{a})=|\lambda\vec{a}|\cos(\pi-\theta)=\lambda|\vec{a}|\cos\theta=\lambda\,射影_{\vec{l}}\vec{a}.$$

故结论成立.

例 1.6.1 在直角坐标 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下，向量 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，则

$$射影_{\vec{i}}\vec{a}=x,\quad 射影_{\vec{j}}\vec{a}=y,\quad 射影_{\vec{k}}\vec{a}=z.$$

证 如图 1-6-4 所示，取向径

$$\overrightarrow{OP}=\vec{a},$$

则

$$射影向量_{\vec{i}}\vec{a}=\overrightarrow{OA}=x\vec{i},$$

$$射影向量_{\vec{j}}\vec{a}=\overrightarrow{OB}=y\vec{j},$$

$$射影向量_{\vec{k}}\vec{a}=\overrightarrow{OC}=z\vec{k}.$$

故结论成立.

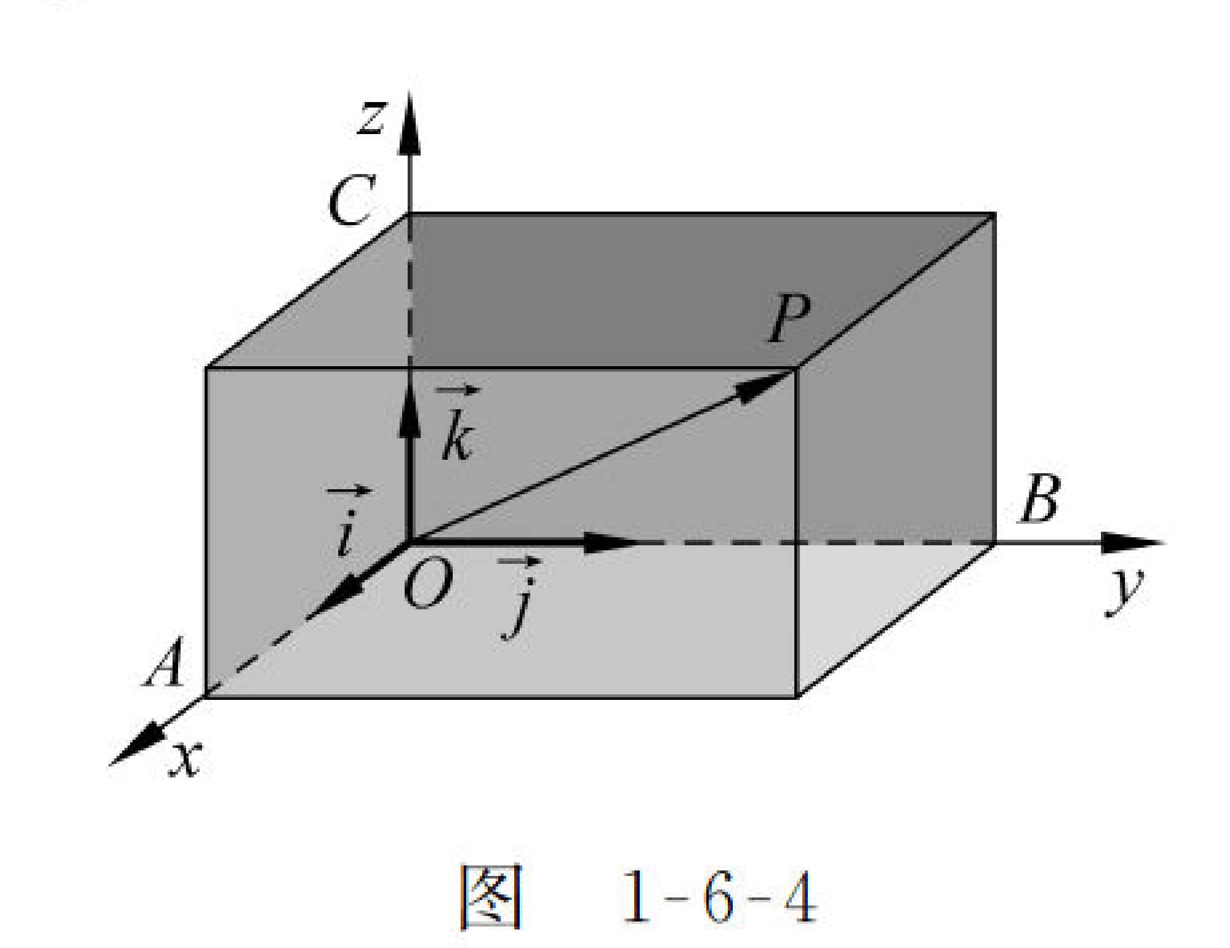


图 1-6-4

2. 两向量的数量积

在物理学中，力和位移都是既有大小又有方向的量，所以可用向量表示. 如果物体在力 $\vec{F}$ 的作用下产生位移 $\vec{s}$（如图 1-6-5 所示），那么 $\vec{F}$ 所做的功等于 $\vec{F}$ 在 $\vec{s}$ 方向的分力 $\vec{F}_1$ 的大小与 $\vec{s}$ 的大小的乘积，即

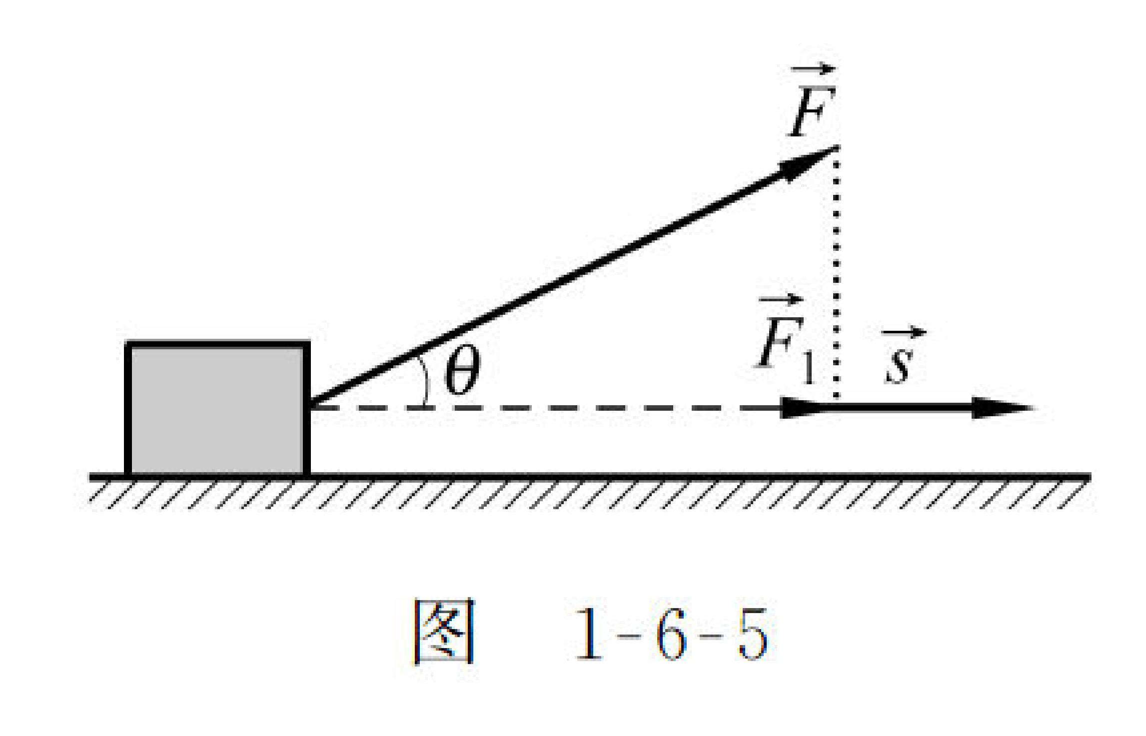


图 1-6-5

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\angle(\vec{F},\vec{s}).$$

这里的功 W 是由两个向量 $\vec{F}$ 与 $\vec{s}$ 确定的一个数量，类似的情况还会在其他问题中出现. 就这一模型在数学里抽象可得下面的定义.

定义 1.6.3 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模与它们夹角的余弦的积称为这两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的**数量积（内积）**，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 或 $\vec{a}\vec{b}$. 即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

显然，当 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 为零向量时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为非零向量时，

因 $|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=$射影$_{\vec{a}}\vec{b}$，$|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=$射影$_{\vec{b}}\vec{a}$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{射影}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{射影}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

而 $\vec{e}$ 为单位向量时，则

$$\vec{a}\cdot\vec{e}=\text{射影}_{\vec{e}}\vec{a}.$$

在定义 1.6.3 中取 $\vec{a}=\vec{b}$，则得 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，从而

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

定理 1.6.4 $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

证 因为 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$，所以结论成立.

值得注意的是，零向量与任一向量平行，也与任一向量垂直.

数量积有下面的运算律.

定理 1.6.5 向量的数量积满足下面的运算律.

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

(2) 数因子的结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；

(4) 正定性 $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqslant 0$，且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

证 当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 有一个是零向量时，结论显然成立. 当 3 个向量皆非零向量时，则有

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\angle(\vec{b},\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，结论显然成立. 当 $\lambda\neq 0$ 时，

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\ \text{射影}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=|\vec{b}|\ \lambda\cdot\text{射影}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

(3)
$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=|\vec{c}|\cdot\text{射影}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(\text{射影}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{射影}_{\vec{c}}\vec{b})\\&=|\vec{c}|\cdot\text{射影}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\cdot\text{射影}_{\vec{c}}\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geqslant 0$.

推论 $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})+\mu(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

由于向量具有上面的运算律，所以向量的数量积运算可以像多项式的乘法那样展开. 例如

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2;\quad (\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm 2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2\ \text{等}.$$

例 1.6.2 证明：平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和.如图 1-6-6 所示，即 $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

证 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则对角线

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}.$$

于是$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$，故结论成立.

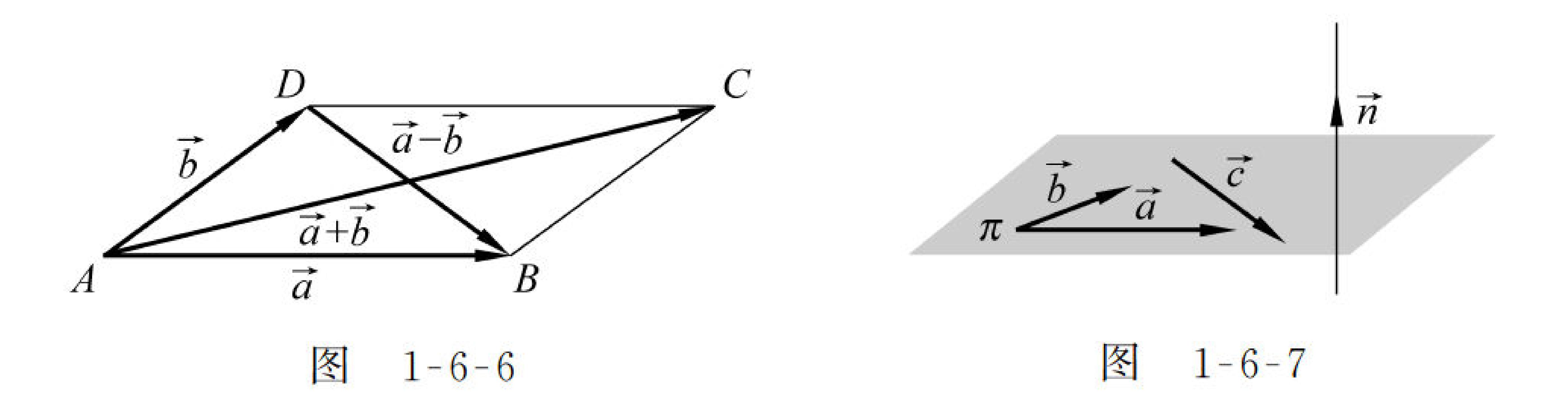


图 1-6-6　　图 1-6-7

例 1.6.3 证明：如果一条直线垂直于某平面内的两条相交直线，则它垂直于这平面内的任一条直线.

证 如图 1-6-7 所示，设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为平面 π 上的线性无关向量，$\vec{n}\perp\vec{a}$，$\vec{n}\perp\vec{b}$，则

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=0,\quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0.$$

向量 $\vec{c}$ 为平面上的任一向量，则

$$\exists x,y\in\mathbb{R},\quad \ni \text{“}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}\text{”},$$

从而 $\vec{n}\cdot\vec{c}=\vec{n}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=x(\vec{n}\cdot\vec{a})+y(\vec{n}\cdot\vec{b})=0$，即 $\vec{c}\perp\vec{n}$，故结论成立.

例 1.6.4 证明：三角形的三条高交于一点.

证 如图 1-6-8 所示，设$\triangle ABC$ 中，BC，CA 两边上的高交于 H 点.再设

$$\overrightarrow{HA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{HB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{HC}=\vec{c},$$

则$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$.
由$\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$得 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，即 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$.由$\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$得 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$.从而 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，所以

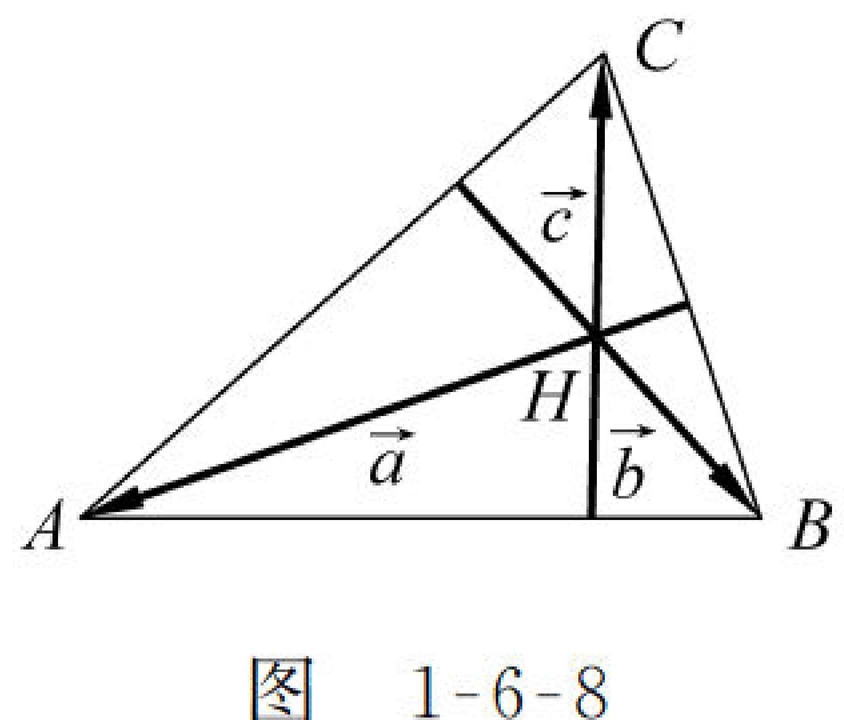


图 1-6-8

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0,$$

即$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$,故结论成立.

习 题 1.6

1. 已知向量$\overrightarrow{AB}$与单位向量 $\vec{e}$ 的夹角为 $150°$,且$|\overrightarrow{AB}|=10$,求射影向量$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$与射影$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$.

2. 证明：

(1) $\vec{a}\perp[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]$.

(2) 在平面上如果 $\vec{m}_1$ 与 $\vec{m}_2$ 不平行,且

$$\vec{a}\cdot\vec{m}_1=\vec{b}\cdot\vec{m}_1,\quad \vec{a}\cdot\vec{m}_2=\vec{b}\cdot\vec{m}_2,$$

则 $\vec{a}=\vec{b}$.

3. 已知向量 $\vec{a}\perp\vec{b}$,$\angle(\vec{a},\vec{c})=\angle(\vec{b},\vec{c})=60°$,且$|\vec{a}|=1$,$|\vec{b}|=2$,$|\vec{c}|=3$,计算：

(1) $(\vec{a}+\vec{b})^2$； (2) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$；

(3) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}-3\vec{c})$； (4) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})^2$.

4. 已知$|\vec{a}|=2$,$|\vec{b}|=5$,$\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$,$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{q}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$,问 λ 取何值时,$\vec{p}\perp\vec{q}$.

1.7 数量积的坐标表示

1. 数量积的坐标表示

在直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下,向量的数量积运算较简单.

定理 1.7.1 设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

证 因为 $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$,$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$,所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

故结论成立.

推论　设 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,则 $\vec{a}$ 的表出系数为

$$x=\vec{a}\cdot\vec{i},\quad y=\vec{a}\cdot\vec{j},\quad z=\vec{a}\cdot\vec{k}.$$

证　因为

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{i}=x,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{j}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{j}=y,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{k}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{k}=z,$$

故结论成立.

2. 应用

在直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下,由于向量的数量积运算较简单,所以向量的数量积可得到下面的应用.

(1) 两点间的距离

在公式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ 中,当 $\vec{a}=\vec{b}$ 时,则有

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2.$$

从而$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$,于是我们有下面的结论.

定理 1.7.2　向量 $\vec{a}=(x,y,z)$的模为

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

推论　空间两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$间的距离为

$$d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

证　因为$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,所以空间两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$间的距离为

$$d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(2) 向量的方向余弦

向量与坐标轴的正向所成的角称为向量的**方向角**. 一般地,向量

$\vec{a}$ 与 x 轴的夹角记作 α，与 y 轴的夹角记作 β，与 z 轴的夹角记作 γ. 方向角的余弦称为**方向余弦**.

定理 1.7.3 非零向量 $\vec{a}=(x,y,z)$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

证 因为 $x=\vec{a}\cdot\vec{i}=|\vec{a}|\cos\alpha$，$y=\vec{a}\cdot\vec{j}=|\vec{a}|\cos\beta$，$z=\vec{a}\cdot\vec{k}=|\vec{a}|\cos\gamma$，所以

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|}=\frac{x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|}=\frac{y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|}=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

故结论成立.

由定理 1.7.3 知，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以单位向量的坐标等于它的方向余弦，即

$$\vec{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

例 1.7.1 已知 $\vec{a}=(3,5,-8)$，求 $\vec{a}$ 的方向余弦与 $\vec{a}^0$.

解 因为 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+5^2+(-8)^2}=7\sqrt{2}$，所以

$$\cos\alpha=\frac{3}{7\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{14},\quad \cos\beta=\frac{5}{7\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{14},$$

$$\cos\gamma=\frac{-8}{7\sqrt{2}}=\frac{-4\sqrt{2}}{7}.$$

则 $\vec{a}^0=\left(\frac{3\sqrt{2}}{14},\frac{5\sqrt{2}}{14},-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$ 为所求.

(3) 两向量的夹角

定理 1.7.4 设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 为两个非零向量，则

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

证　因为$|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$，所以$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，而

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\ |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

所以结论成立.

推论　设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例 1.7.2　已知三点$A(1,0,0)$，$B(3,1,1)$，$C(2,0,1)$，且

$$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\quad \overrightarrow{CA}=\vec{b},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{c},$$

求：(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角；(2) $\vec{a}$在$\vec{c}$上的射影.

解　因为$\vec{a}=\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0)$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$；$\vec{b}=\overrightarrow{CA}=(-1,0,-1)$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$；$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$，$|\vec{c}|=\sqrt{6}$. 又

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=-3,$$

所以：(1) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，即$\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) 射影$_{\vec{c}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

例 1.7.3　如图1-7-1所示，点O在二面角π_1-MN-π_2的棱MN上，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别在平面π_1，π_2内，设$\angle AON=\alpha$，$\angle BON=\beta$，$\angle AOB=\theta$，二面角π_1-MN-π_2为φ，求证：

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi.$$

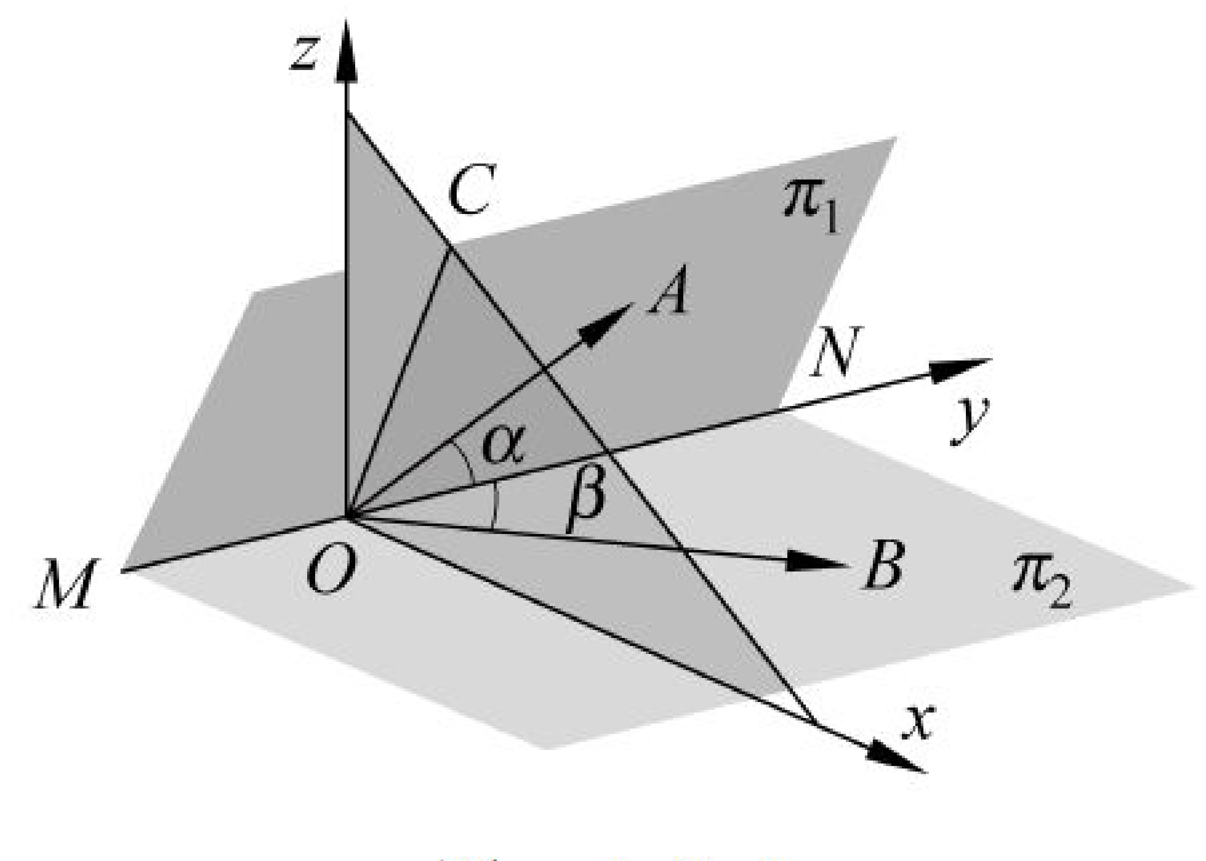


图　1-7-1

证　以O为原点，平面π_2为xOy坐标面，直线MN为y轴建立坐标系. 设xOz坐标面与平面π_1的交线为OC，则$OC\perp MN$，设$\overrightarrow{OA}^0=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}^0=\vec{b}$，则$\angle(\vec{a},\vec{b})=\theta$. 又

$$射影_{\overrightarrow{OC}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\sin\alpha$$

从而

$$射影_{\overrightarrow{Ox}}\overrightarrow{OA}=|OA|\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$射影_{\overrightarrow{Oz}}\overrightarrow{OA}=|OA|\sin\alpha\sin\varphi,$$

所以

$$|\vec{a}|\cos\angle AOx=|\vec{a}|\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$|\vec{a}|\cos\angle AOz=|\vec{a}|\sin\alpha\sin\varphi.$$

即 $\vec{a}=(\sin\alpha\cos\varphi,\cos\alpha,\sin\alpha\sin\varphi)$. 又 $\vec{b}=(\sin\beta,\cos\beta,0)$，于是

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

故结论成立.

例 1.7.4　利用向量证明柯西-施瓦兹不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{3}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{3}a_k^2\sum_{k=1}^{3}b_k^2.$$

证　设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，因为

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\angle(\vec{a},\vec{b})|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{3}a_kb_k\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{3}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{3}b_k^2},$$

故 $\left(\sum_{k=1}^{3}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{3}a_k^2\sum_{k=1}^{3}b_k^2$.

习　题　1.7

1. 将下列向量单位化：

(1) $\vec{a}=5\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$；　　(2) $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{k}$.

2. 已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$，问 λ 取何值时，$\vec{u}\perp\vec{v}$.

3. 用向量证明：

(1) 三角形余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

(2) 平行四边形成为菱形的充分必要条件是对角线互相垂直.

(3) 半圆上的圆周角为直角.

(4) 三角形三边的垂直平分线共点，且这点到三个顶点的距离相等.

1.8 两向量的向量积

1. 向量积的概念

定义 1.8.1 两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积(外积)是一个向量，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$ 或 $[\vec{a}\vec{b}]$. 向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的模是

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b}),$$

它的方向与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 都垂直且依 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ 的顺序构成右手标架

$$\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}.$$

如图 1-8-1 所示，因为平行四边形的面积等于它的两邻边长的积乘以其夹角的正弦，所以我们有下面的结论.

定理 1.8.1 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 线性无关，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 等于以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

力学中的力矩就是向量积的一个实例. 如图 1-8-2 所示，设有一轴心过 O 点的圆盘，力 $\vec{F}$ 作用在圆盘上的 A 点，$\theta=\angle(\overrightarrow{OA},\vec{F})$，$\vec{F}$ 在与半径 OA 垂直的方向上的分力为 $\vec{F}_1$，那么 $\vec{F}$ 产生的力矩 $\vec{M}$ 的大小为 $|\vec{F}_1||\overrightarrow{OA}|=|\vec{F}||\vec{r}|\sin\theta$，力矩的方向就是右手法则确定的方向. 也就是说

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}.$$

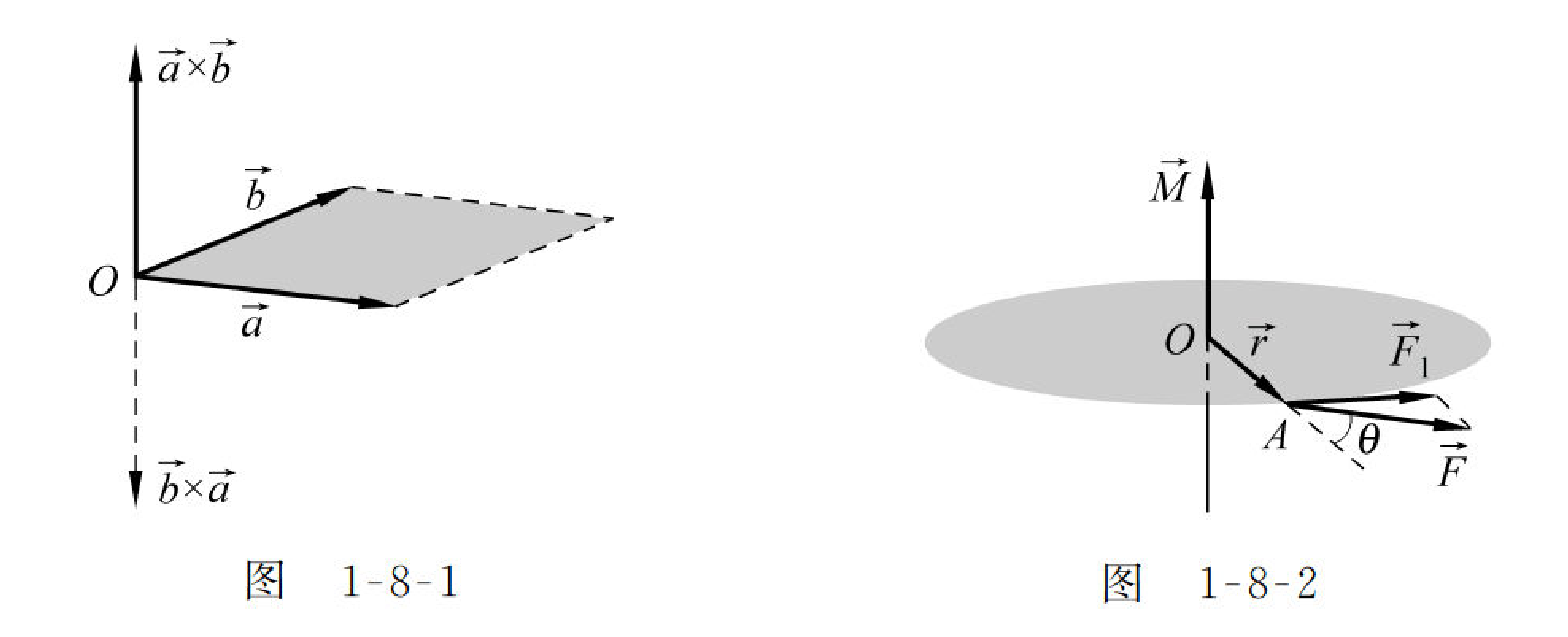


图 1-8-1　　图 1-8-2

定理 1.8.2　$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，特别地，$\forall\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

证　(⇒)若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$，所以 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

(⇐)若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，则 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 或 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$，故 $\vec{a}/\!/\vec{b}$. 综上知结论成立.

2. 向量积的运算律

定理 1.8.3　向量积具有反交换律，即

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

证　当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，此时结论成立. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 线性无关时，由右手标架与左手标架的关系知结论成立.

定理 1.8.4　向量积具有数因子结合律，即

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}).$$

证　当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线或 $\lambda=0$ 时，结论成立. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 线性无关且 $\lambda=0$ 时，有

$$|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})|=|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b}),$$

$$|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\lambda\vec{a},\vec{b}),$$

$$|\vec{a}\times(\lambda\vec{b})|=|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\lambda\vec{b}),$$

所以三个向量 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$，$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$，$\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ 的模相等. 又当 $\lambda>0$ 时，三个向量的方向与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，三个向量的方向与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 反向，故结论成立.

推论　设 λ,μ 为任意实数，则

$$(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b}).$$

为了证明向量积的分配律,先给出作图法求向量积的方法.

定理 1.8.5 如图 1-8-3 所示,归结 $\vec{c}^0$ 与 $\vec{a}$ 为同一始点 O,过 O 点作垂直于 $\vec{c}^0$ 的平面 π,取 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$A$ 点在平面 π 上的射影为 A',将射影向量 $\overrightarrow{OA'}$ 按顺时针方向旋转 $90°$ 得 $\overrightarrow{OA_1}$,则

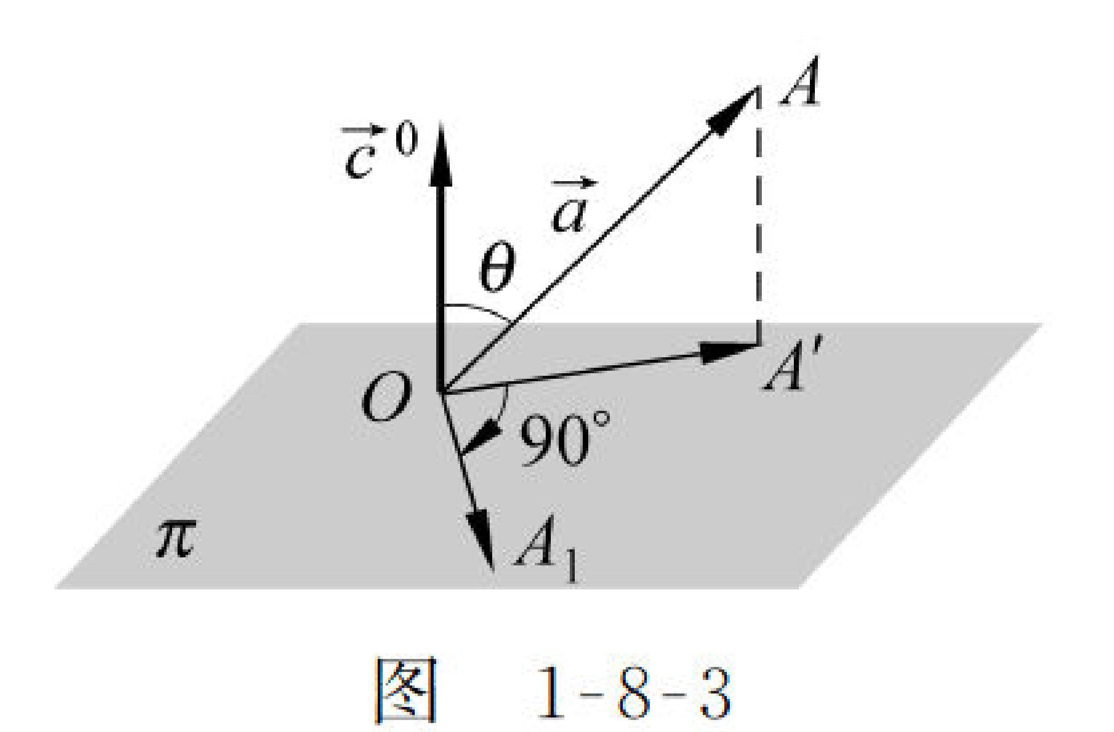


图 1-8-3

$$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}\times\vec{c}^0.$$

证 因为 $\overrightarrow{OA_1}\perp\vec{c}^0$,$\overrightarrow{OA_1}\perp\vec{a}$,且 $\{O;\vec{a},\vec{c}^0,\overrightarrow{OA_1}\}$ 为右手标架,又 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OA'}|=|\vec{a}|\sin\theta$,所以 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}\times\vec{c}^0$.

定理 1.8.6 向量积具有分配律,即

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c};$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.$$

证 当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关时,则结论成立. 否则设 $\vec{c}^0$ 为 $\vec{c}$ 的单位向量. 如图 1-8-4 所示,设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,则 $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$,并设 $\overrightarrow{OA'}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{OB'}$ 为 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OB}$ 在垂直于 $\vec{c}^0$ 的平面 π 上的射影向量,再将 $\overrightarrow{OA'}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{OB'}$ 在平面 π 上按顺时针方向旋转 $90°$ 得

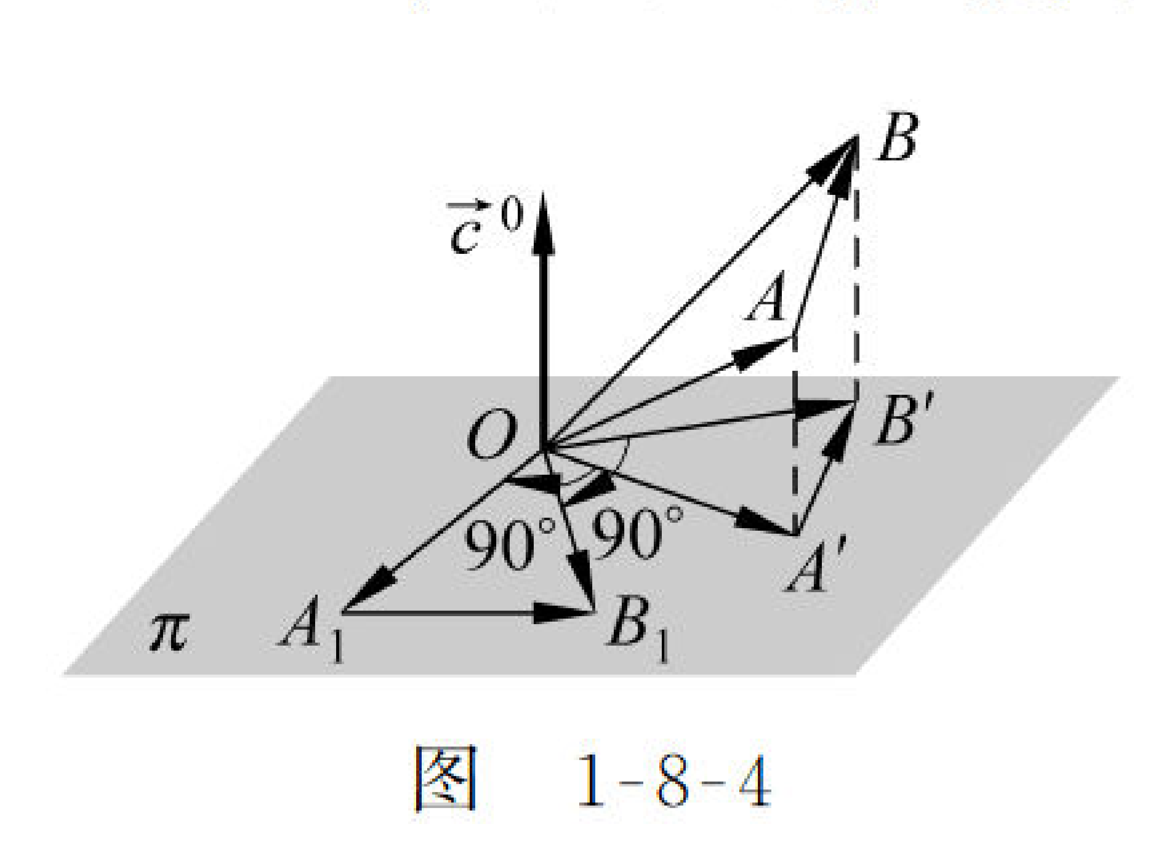


图 1-8-4

$$\overrightarrow{OA_1},\quad\overrightarrow{A_1B_1},\quad\overrightarrow{OB_1},$$

由定理 1.8.5 知 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}\times\vec{c}^0$,$\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}\times\vec{c}^0$,$\overrightarrow{OB_1}=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}^0$,而

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1},$$

所以 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}^0=\vec{a}\times\vec{c}^0+\vec{b}\times\vec{c}^0$. 从而

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}&=(\vec{a}+\vec{b})\times|\vec{c}|\vec{c}^0\\&=|\vec{c}|[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}^0]\\&=|\vec{c}|[\vec{a}\times\vec{c}^0+\vec{b}\times\vec{c}^0]\end{aligned}$$

$$=\vec{a}\times|\vec{c}|\vec{c}^0+\vec{b}\times|\vec{c}|\vec{c}^0$$
$$=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

同理可证 $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$.

例 1.8.1 证明：$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$，并说明它的几何意义.

证 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{a}+(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{b}$
$$=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}$$
$$=2(\vec{a}\times\vec{b}).$$

它的几何意义为：平行四边形的面积的两倍等于它的对角为邻边的平行四边形的面积.

例 1.8.2 证明：$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

证 因为

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b}),\quad(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b}),$$

故

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2.$$

3. 向量积的坐标表示

在直角标架$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下，我们有下面的定理.

定理 1.8.7 设向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

或记为

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

证 因为

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\quad\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\quad\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+x_1z_2(\vec{i}\times\vec{k})+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})\\&\quad+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}.\end{aligned}$$

例 1.8.3　已知 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解　$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&1\\-1&5&7\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-2&1\\5&7\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}1&3\\7&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-2\\-1&5\end{vmatrix}\vec{k}\\&=-19\vec{i}-22\vec{j}+18\vec{k}.\end{aligned}$$

例 1.8.4　已知空间三点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,5)$，$C(3,2,-5)$，求：

(1) $\triangle ABC$ 的面积；(2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解　(1) 在 A,B,C 三点所确定的平面上，如图 1-8-5 所示，

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}S_{\square ABDC}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,\end{aligned}$$

图　1-8-5

而 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,-8)$，

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-3&2\\2&0&-8\end{vmatrix}=24\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$，从而

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}.$$

即 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{21}$ 为所求.

(2) 设 CH 为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高,则

$$|\overrightarrow{CH}|=\frac{S_{\square ABDC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

而 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$,所以 $|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=3\sqrt{6}$.

由例 1.8.4 可获得点到直线的距离公式:

$$d=|\overrightarrow{CH}|=\frac{S_{\square ABDC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

习 题 1.8

1. 已知 $|\vec{a}|=1$,$|\vec{b}|=5$,$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$,求

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$;　　(2) $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})]^2$;

(3) $[(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{b}-2\vec{a})]^2$.

2. 证明:

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2\leqslant\vec{a}^2\vec{b}^2$,并说明什么情形下等号成立;

(2) 如果 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,那么 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$,并说明它的几何意义;

(3) 如果 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$,$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$,那么 $\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线.

3. 已知 $\vec{a}=(2,-3,1)$,$\vec{b}=(1,-2,3)$,求与 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 都垂直,且满足如下之一条件的向量 $\vec{c}$.

(1) $\vec{c}$ 为单位向量;　　(2) $\vec{c}\cdot\vec{d}=10$,$\vec{d}=(2,1,-7)$.

4. 直角坐标系中三点为 $A(5,1,-1)$,$B(0,-4,3)$,$C(1,-3,7)$,求 $\triangle ABC$ 的三条高.

5. 用向量法证明:

(1) 三角形的正弦定理:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$;

(2) 三角形面积的海伦(Heren)公式:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

其中 a,b,c 为三角形三个角 A,B,C 所对的边，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

1.9 三向量的混合积

三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 进行内积与外积的混合运算时，因为两个向量的内积是数，再进行外积运算，即 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ 就没有意义. 因此三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 进行内积与外积的混合运算时，只有先进行外积运算后再进行内积运算，即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，这就是混合积. 这一节，我们将介绍混合积与空间平行六面体的关系；混合积的性质、运算与应用，并给出三元一次方程组的克莱姆法则的证明.

1. 混合积的概念

定义 1.9.1 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积是指 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，记作 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ 或 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

混合积具有下面的性质.

定理 1.9.1 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性无关，以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积为 V，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$. 其中标架 $\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为右手系时取正号，为左手系时取负号.

证 当 $\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为右手系时，设 $\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=\theta$，如图 1-9-1 所示，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，而以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$. 又平行六面体的高为 $h=|\vec{c}|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$，所以

$$V=Sh=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

当 $\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为左手系时，如图 1-9-2 所示，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，所以

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-V.$$

故结论成立.

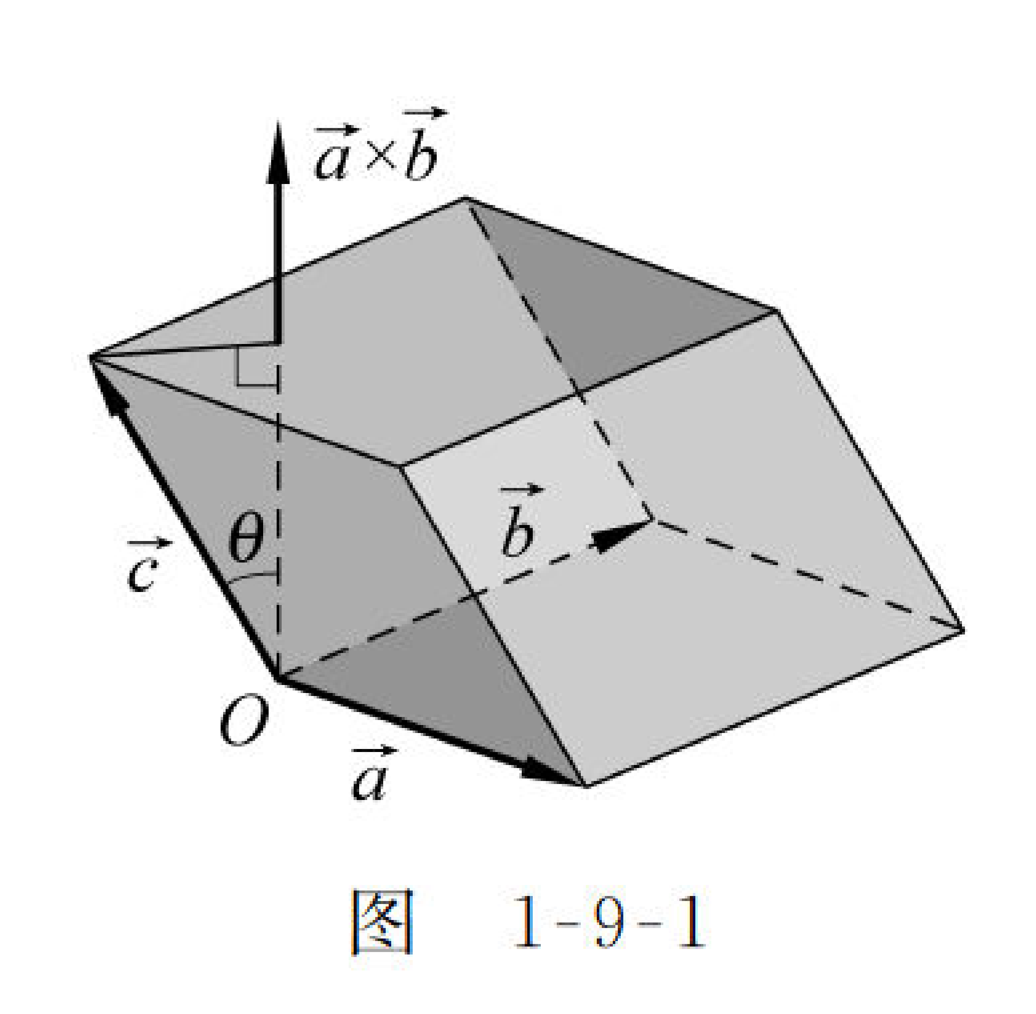


图　1-9-1

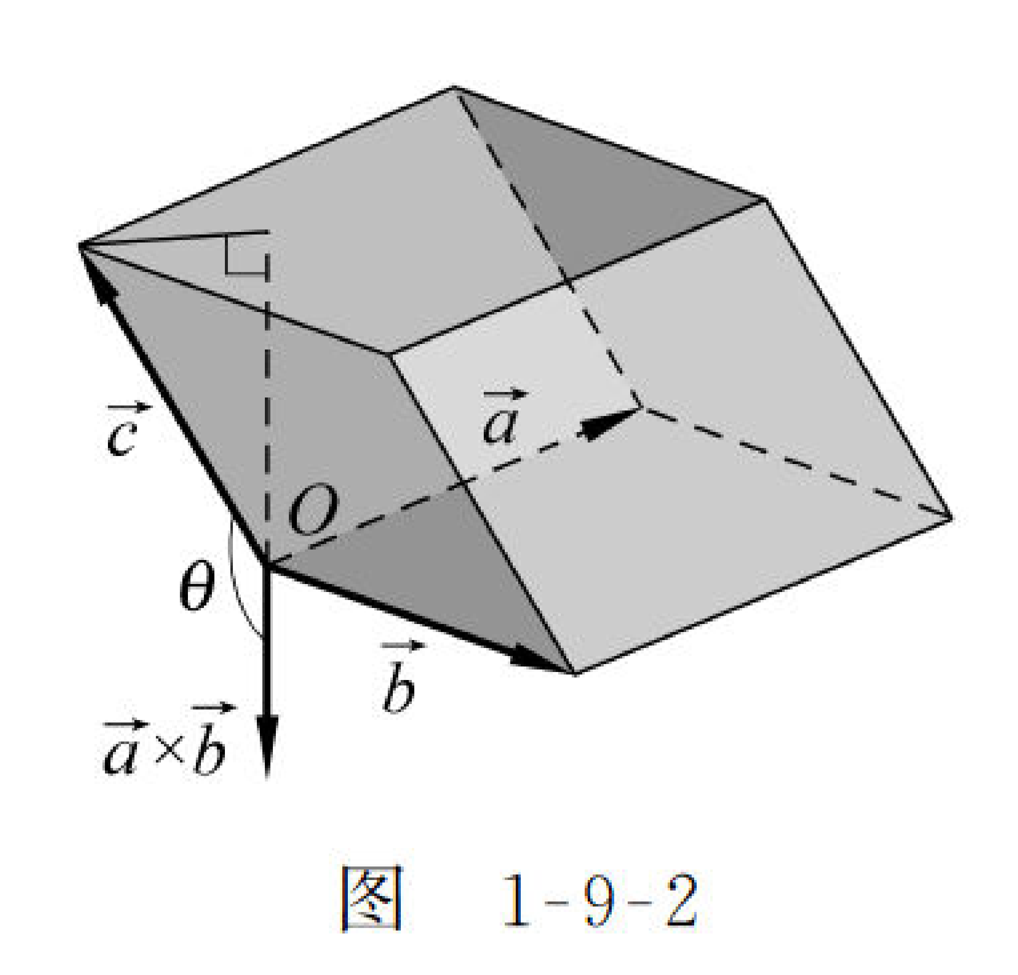


图　1-9-2

定理 1.9.2　三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

证　如果 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$,则结论成立.下面就 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$ 给出证明.

($\Rightarrow$)设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面,因为 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$,所以

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c},$$

故$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

($\Leftarrow$)设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$,则 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$,而 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$,故 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

定理 1.9.3　轮换混合积的三个因子不改变其值,对调任意两个因子要改变混合积的符号,即

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{b}\vec{c}\vec{a})=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$$
$$=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b}).$$

证　因为轮换不会把右手系变为左手系,而对换却把右手系变为左手系,所以结论成立.

例 1.9.1　设三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$,则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证　因为 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$,所以$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$,故结论成立.

2. 混合积的坐标表示

在直角标架$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下,我们有下面的结论.

定理 1.9.4　设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\vec{c}=$

$x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$，则

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

证 因为 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$，所以

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

故结论成立.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$，由定理 1.9.4 知，

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.9.2 已知四面体 $ABCD$ 的四个顶点为 $A(0,0,0)$，$B(6,0,6)$，$C(4,3,0)$，$D(2,-1,3)$，求此四面体的体积.

解 由图 1-9-3 知，四面体 $ABCD$ 的体积等于以 AB，AC，AD 为邻边的平行六面体的体积的六分之一. 因此

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|.$$

而 $\overrightarrow{AB}=(6,0,6)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-1,3)$，所以

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-6,$$

故

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|=1.$$

例 1.9.3 设三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关，求向量 $\vec{d}$ 关于 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的分解式.

解 因为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关，所以 $\vec{d}\rightarrow\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$，即

$$\exists x,y,z,\quad \ni\text{“}\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\text{”}.$$

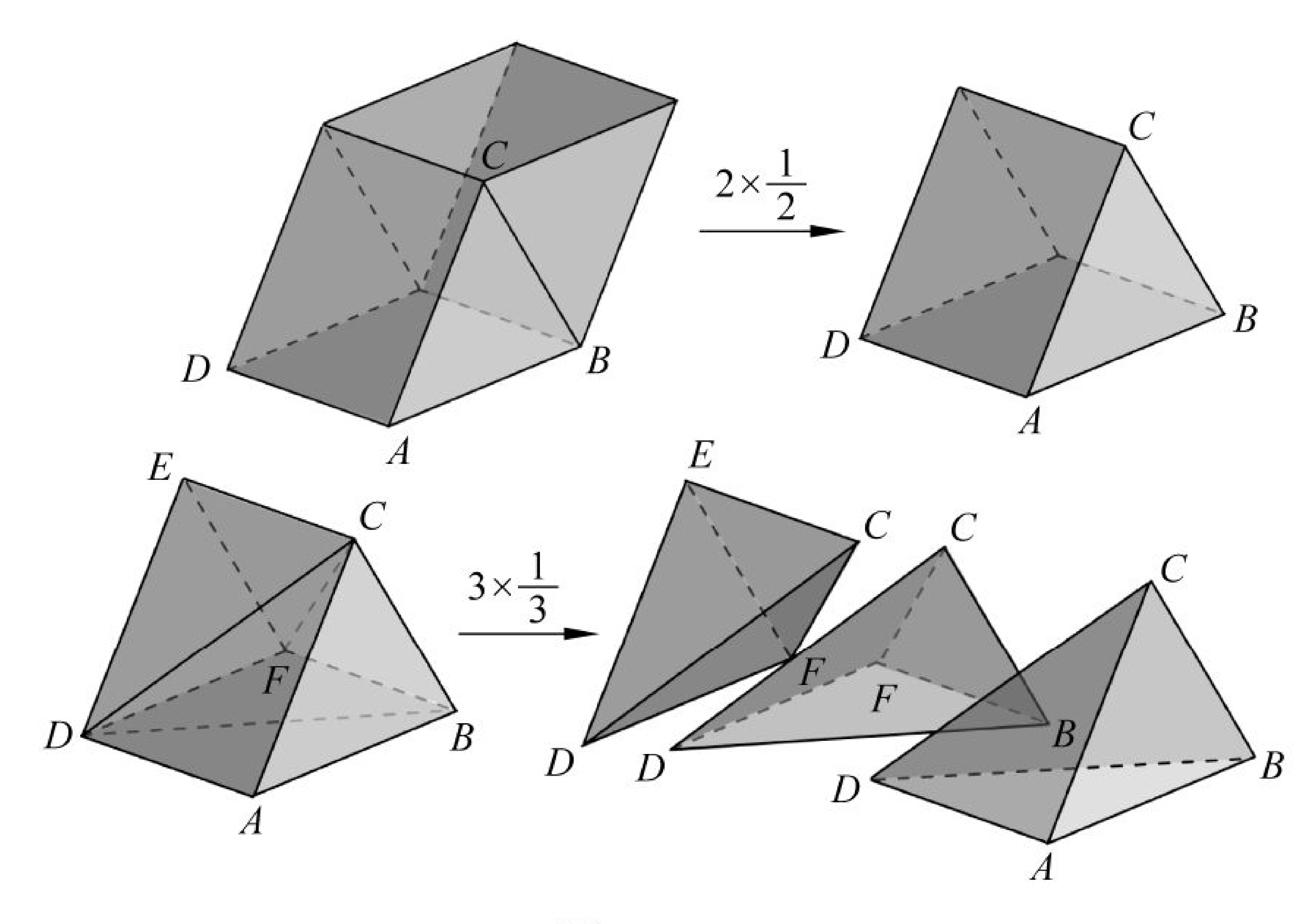


图 1-9-3

于是$(\vec{d}\vec{b}\vec{c})=x(\vec{a}\vec{b}\vec{c})+y(\vec{b}\vec{b}\vec{c})+z(\vec{c}\vec{b}\vec{c})=x(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$,所以

$$x=\frac{(\vec{d}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}.$$

同理可得 $y=\dfrac{(\vec{a}\vec{d}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$,$z=\dfrac{(\vec{a}\vec{b}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$,即

$$\vec{d}=\frac{(\vec{d}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{a}+\frac{(\vec{a}\vec{d}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{b}+\frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{c}.$$

在直角坐标系下,例 1.9.3 就是著名的克莱姆法则.

实因:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),$$

$$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3),\quad \vec{d}=(d_1,d_2,d_3),$$

由 $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$得线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

而

$$D=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_x=(\vec{d}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=(\vec{a}\vec{d}\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=(\vec{a}\vec{b}\vec{d})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

所以当 $D=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\neq 0$ 时,线性方程组有唯一的解

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

例 1.9.4　解线性方程组 $\begin{cases} 3x-2y+z=5, \\ 2x-5y-4z=7, \\ x-3y-3z=8, \end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}=45+8-6+5-12-36=4,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & -4 \\ 8 & -3 & -3 \end{vmatrix}=75+64-21+40-60-42=56,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}=-63-20+16-7+96+30=52,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}=-120-14-30+25+32+63=-44$$

所以 $x=\frac{D_x}{D}=14, y=\frac{D_y}{D}=13, z=\frac{D_z}{D}=-11$ 为所求.

习 题 1.9

1. 证明下列各题.

(1) $(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

(2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1+\vec{c}_2)=(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1)+(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_2)$;

(3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. 设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,证明向量

$$\vec{r}=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})$$

垂直于$\triangle ABC$确定的平面.

3. 设 $\vec{u}=a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_2+c_1\vec{e}_3$,$\vec{v}=a_2\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+c_2\vec{e}_3$,$\vec{w}=a_3\vec{e}_1+b_3\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3$,证明

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3).$$

4. 已知在直角标架下,

$$\vec{a}=(3,4,5),\quad \vec{b}=(1,2,2),\quad \vec{c}=(9,4,6),$$

求以它们为邻边的平行六面体的体积.

5. 在直角标架下的四点为 $A(1,4,5)$,$B(1,0,2)$,$C(3,1,7)$,$D(0,2,9)$,求 D 点到平面 ABC 的距离.

6. 求一个二次多项式 $f(x)$,

$$\ni \text{“}f(1)=0,f(2)=3,f(-3)=28\text{”}.$$

1.10 三向量的双重向量积

定义 1.10.1 三个向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 的双重向量积是指

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

因为 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$,$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$,又$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\perp\vec{c}$,所以$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 与

$\vec{a},\vec{b}$ 共面且有下面的结论.

定理 1.10.1　$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，其中 $x=-\vec{b}\cdot\vec{c}$，$y=\vec{a}\cdot\vec{c}$.

证　设在直角标架下，$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(d_1,d_2,d_3)$，$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\\&=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}d_1&=\begin{vmatrix}a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\\&=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2\\&=(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_2c_2+b_3c_3)a_1\\&=(\vec{a}\cdot\vec{c}-a_1c_1)b_1-(\vec{b}\cdot\vec{c}-b_1c_1)a_1\\&=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_1-(\vec{b}\cdot\vec{c})a_1.\end{aligned}$$

同理可得 $d_2=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_2-(\vec{b}\cdot\vec{c})a_2$，$d_3=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_3-(\vec{b}\cdot\vec{c})a_3$. 所以

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b},\quad \text{其中}\quad x=-\vec{b}\cdot\vec{c},y=\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

必须指出，三向量的向量积不满足结合律，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

实因 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

三向量的双重向量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 与 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ 的记忆法为：

三向量的双重向量积等于中间的向量与其余两个向量的数量积的乘积减去括号中另一个向量与其余两个向量的数量积的乘积. 即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a},$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

例 1.10.1 证明拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \vec{a}_1\cdot\vec{b}_2\\ \vec{b}_1\cdot\vec{a}_2 & \vec{b}_1\cdot\vec{b}_2\end{vmatrix}.$$

证 $(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)$

$=(\vec{a}_1,\vec{b}_1,(\vec{a}_2\times\vec{b}_2))=((\vec{a}_2\times\vec{b}_2),\vec{a}_1,\vec{b}_1)$

$=((\vec{a}_2\times\vec{b}_2)\times\vec{a}_1)\cdot\vec{b}_1$

$=((\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\vec{b}_2-(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)\vec{a}_2)\cdot\vec{b}_1$

$=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2)-(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1).$

所以

$$(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \vec{a}_1\cdot\vec{b}_2\\ \vec{b}_1\cdot\vec{a}_2 & \vec{b}_1\cdot\vec{b}_2\end{vmatrix}.$$

在例 1.10.1 中取 $\vec{a}=\vec{a}_1=\vec{a}_2,\vec{b}=\vec{b}_1=\vec{b}_2$,则有

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

例 1.10.2 证明雅可比(Jacobi)恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

证 因为

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a},$$
$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b},$$
$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

三式相加即得

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

例 1.10.3 证明:

$$(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\times(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)=(\vec{a}_1,\vec{b}_1,\vec{b}_2)\vec{a}_2-(\vec{a}_1,\vec{b}_1,\vec{a}_2)\vec{b}_2$$
$$=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_2)\vec{b}_1-(\vec{b}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_2)\vec{a}_1.$$

证 $(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\times(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)$

$=((\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\cdot\vec{b}_2)\vec{a}_2-((\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\cdot\vec{a}_2)\vec{b}_2$

$$=(\vec{a}_1,\vec{b}_1,\vec{b}_2)\vec{a}_2-(\vec{a}_1,\vec{b}_1,\vec{a}_2)\vec{b}_2.$$

又

$$\begin{aligned}&(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\times(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)\\=&-(\vec{a}_2\times\vec{b}_2)\times(\vec{a}_1\times\vec{b}_1)\\=&-[((\vec{a}_2\times\vec{b}_2)\cdot\vec{b}_1)\vec{a}_1-((\vec{a}_2\times\vec{b}_2)\cdot\vec{a}_1)\vec{b}_1]\\=&-[(\vec{a}_2,\vec{b}_2,\vec{b}_1)\vec{a}_1-(\vec{a}_2,\vec{b}_2,\vec{a}_1)\vec{b}_1]\\=&(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_2)\vec{b}_1-(\vec{b}_1,\vec{a}_2,\vec{b}_2)\vec{a}_1.\end{aligned}$$

故结论成立.

习 题 1.10

1. 在直角标架下已知

$$\vec{a}=(1,0,1),\quad \vec{b}=(1,-2,0),\quad \vec{c}=(-1,2,1),$$

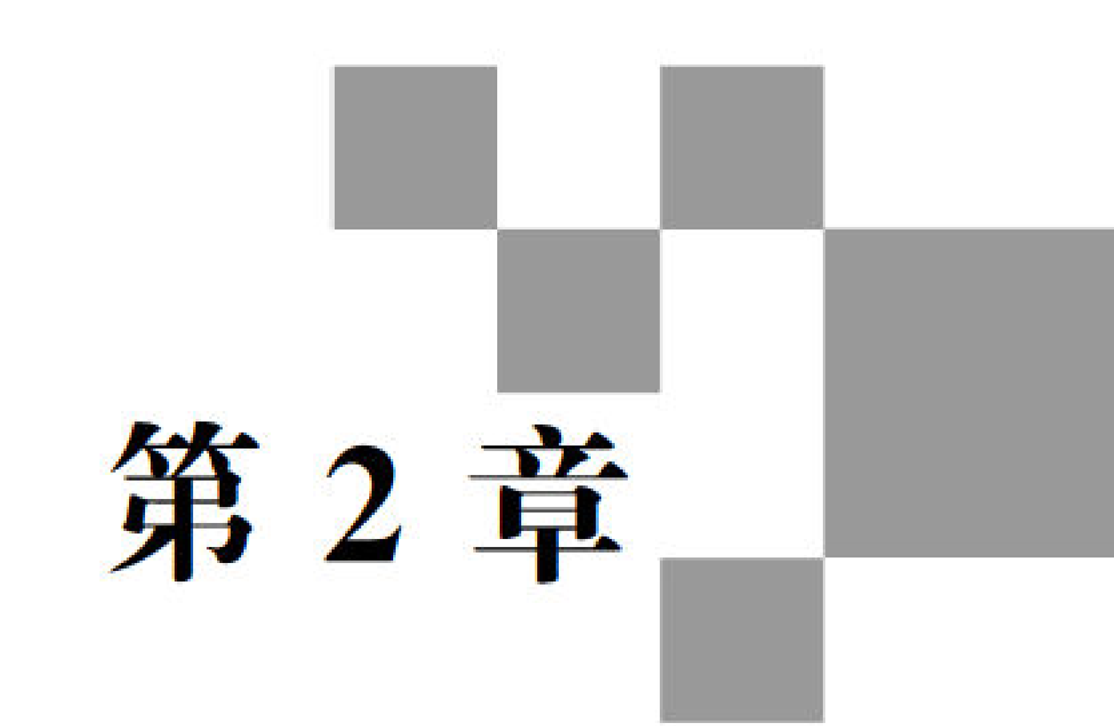
求$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 与 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

2. 证明：$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{a}$.

3. 证明： $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{e}\times\vec{f})$

$$=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{e},\vec{f})-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}).$$

4. 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ 共面.



第 2 章

轨迹与方程

平面或空间在取定标架后，点就与二元有序数组(x, y)或三元有序数组(x, y, z)构成一一对应，从而就可以用“数”去研究“形”，也可以用“形”来解释“数”.

2.1　平面曲线的方程

1. 直角坐标系下的平面曲线方程

定义 2.1.1　在平面上取定坐标系后，如果方程 $F(x, y)=0$ 与平面曲线 L 满足：

(1) 满足方程的有序数对(x, y)对应的点 $P(x, y)$在曲线 L 上，

(2) 曲线 L 上的任一点 $P(x, y)$的坐标(x, y)满足方程，

则称方程 $F(x, y)=0$ 是曲线 L 的**平面曲线方程**. 而曲线 L 称为方程 $F(x, y)=0$ 的**图形**.

由平面曲线方程的定义，平面几何图形就可以用代数方法来研究，向量就是工具.

例 2.1.1　在平面上，求圆心在原点，半径为 R 的圆的方程.

解　在圆上取动点 $P(x, y)$，则向径$\overrightarrow{OP}$满足$|\overrightarrow{OP}|=R$，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=R.$$

所以曲线方程 $x^2+y^2=R^2$ 为所求.

类似地,在平面上,圆心在(a,b)半径为 R 的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

值得注意的是,有时在化简过程中会增添不符合题设条件的内容,此时要把这些不符合题设条件的结论去掉.

例 2.1.2 已知两点 $A(-2,-2)$,$B(2,2)$,求满足条件

$$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=4$$

的动点 $P(x,y)$的轨迹方程.

解 由题设得

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=4.$$

移项得 $\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}=4+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$,两边平方、化简整理得

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=x+y-2.$$

再平方得 $xy=2$,所以 $xy=2(x+y-2\geqslant 0)$为所求.

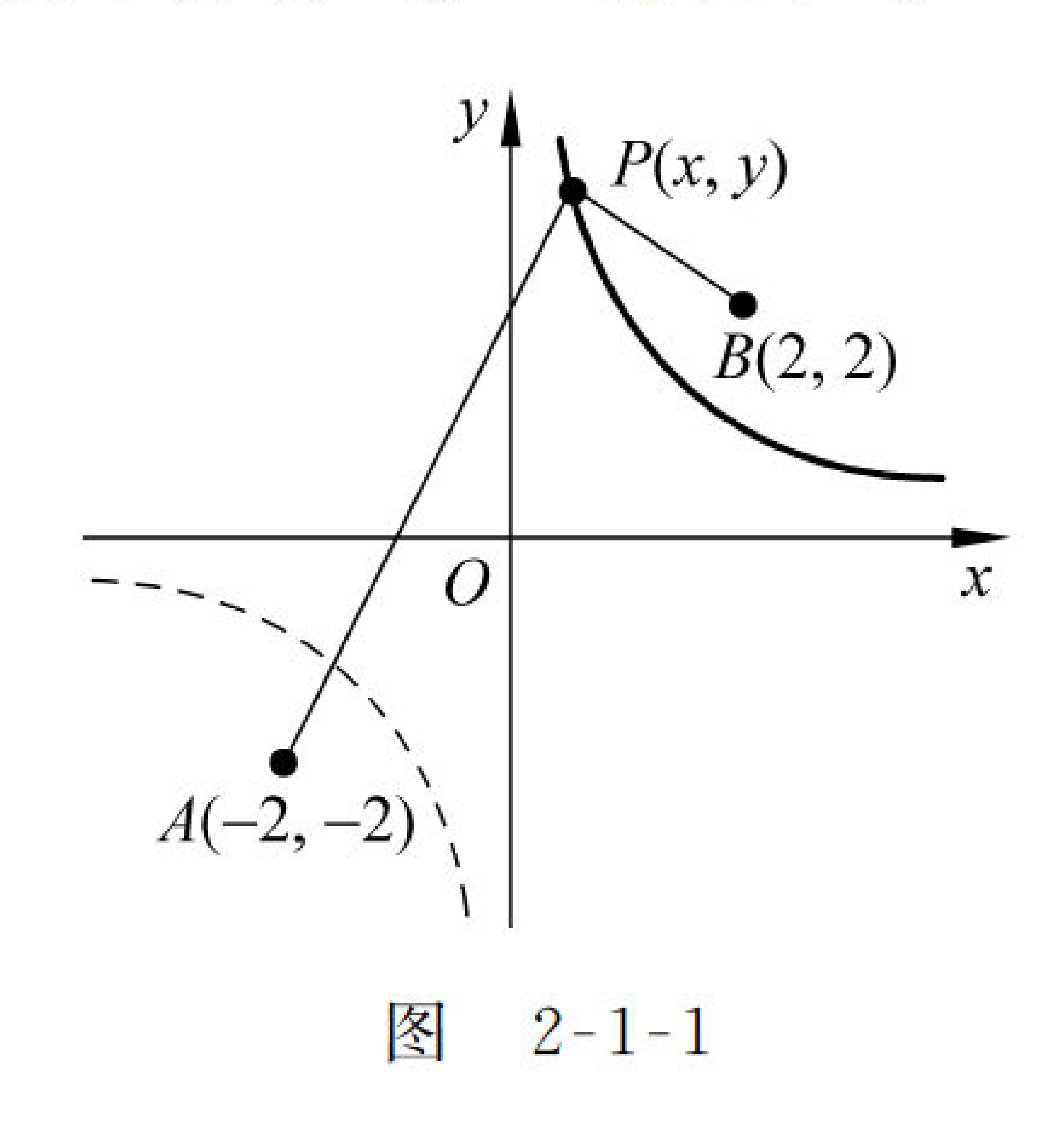


图 2-1-1

值得注意的是,条件

$$x+y-2\geqslant 0$$

不可少.如图 2-1-1 所示,满足题设条件的仅是双曲线 $y=\dfrac{2}{x}$的一支

$$y=\frac{2}{x}\quad(x+y>2),$$

而另一支 $y=\dfrac{2}{x}(x+y<2)$不满足题设条件.

2. 平面曲线的参数方程

曲线可视为点运动的轨迹,当动点 P 由某一参数如时间 t 给出时,动点的向径$\overrightarrow{OP}$就是一个变量,这时我们称向径$\overrightarrow{OP}$为变向量.如果 $\forall t\in[a,b]$,都能确定唯一的向径$\overrightarrow{OP}=\vec{r}$,这时我们称向径 $\vec{r}$ 是 t 的向量函数,记作

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\quad t\in[a,b].$$

选定标架$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$后,向量函数可表为

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2,\quad t\in[a,b].$$

定义 2.1.2 如果向量函数 $\vec{r}=\vec{r}(t),t\in[a,b]$满足:

(1) 当 $t\in[a,b]$时,向径 $\vec{r}(t)$的终点在曲线 L 上;

(2) 曲线 L 上的任一点 $P(x(t),y(t))$都是向径 $\vec{r}(t)$的终点,则称 $\vec{r}(t),(a\leqslant t\leqslant b)$为曲线 L 的**向量式参数方程**.

由于 $\vec{r}(t)(a\leqslant t\leqslant b)$可表为

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2\quad(a\leqslant t\leqslant b),$$

所以曲线 L 的参数方程可表为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

此称为曲线 L 的**坐标式参数方程**.

例 2.1.3 一个圆在直线上无滑动地滚动,求圆周上一点的轨迹.

解 在直角标架下,设滚动圆的半径为 a,开始时动点 P 位于原点.如图 2-1-2 所示,经过一段时间后,圆与直线(x 轴)的切点移到 A 点,圆心移到 C 点.于是

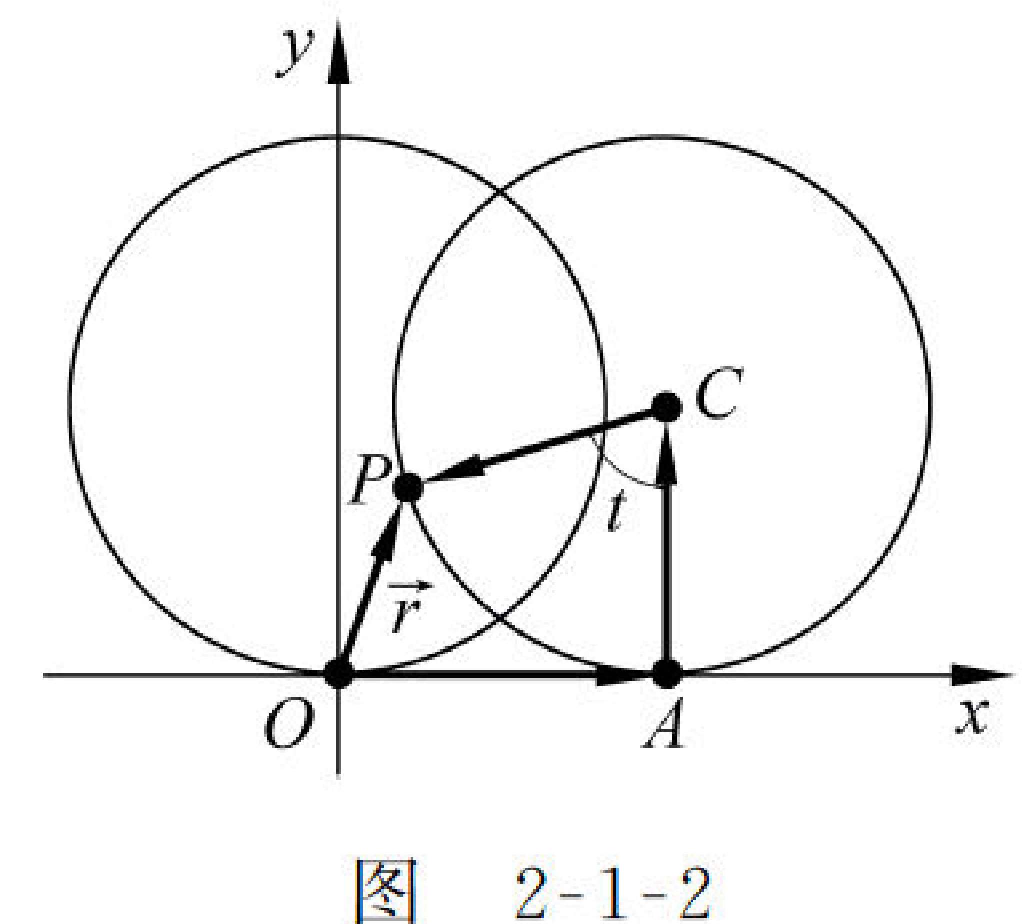


图 2-1-2

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP},$$

设 $t=\angle(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA})$,则$\overrightarrow{CP}$与 x 轴的有向角为$\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{CP})=-\dfrac{\pi}{2}-t$(其中符号$\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{CP})$表示以 $\vec{i}$ 为始边,以$\overrightarrow{CP}$为终边的有向角.),从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=a\cos\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)\vec{i}+a\sin\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)\vec{j}\\&=-a\sin t\vec{i}-a\cos t\vec{j}.\end{aligned}$$

又$|\overrightarrow{OA}|=\overset{\frown}{AP}=at$,$|\overrightarrow{AC}|=a$,所以$\overrightarrow{OA}=at\,\vec{i}$,$\overrightarrow{AC}=a\,\vec{j}$,从而

$$\vec{r}=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$$

为动点 P 的向量式参数方程.

设动点 P 的坐标为(x,y),则坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

取 $t\in[0,\pi]$时,消去参数而得普通方程

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}.$$

这个方程比参数方程复杂得多. 取$-\infty<t<+\infty$时,曲线称为**旋轮线或摆线**,如图 2-1-3 所示.

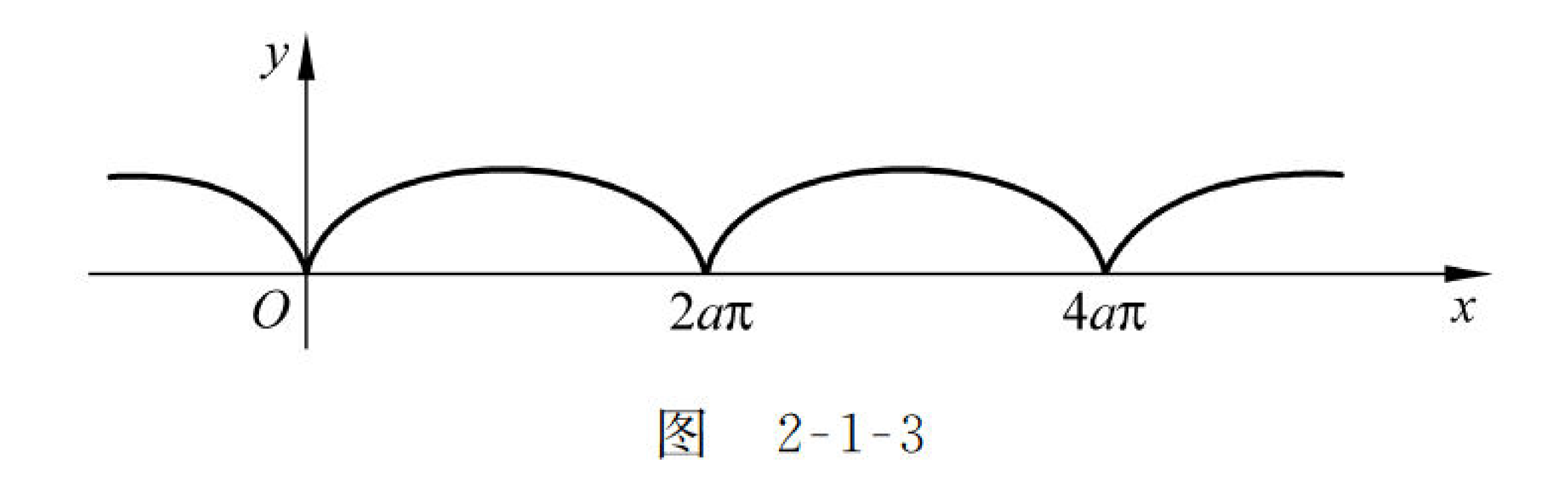


图　2-1-3

例 2.1.4　已知大圆半径为 a,小圆半径为 b,设大圆不动,而小圆在大圆内无滑动滚动,动圆周上一点 P 的轨迹称为**内旋线**或**内摆线**. 求内旋线的方程.

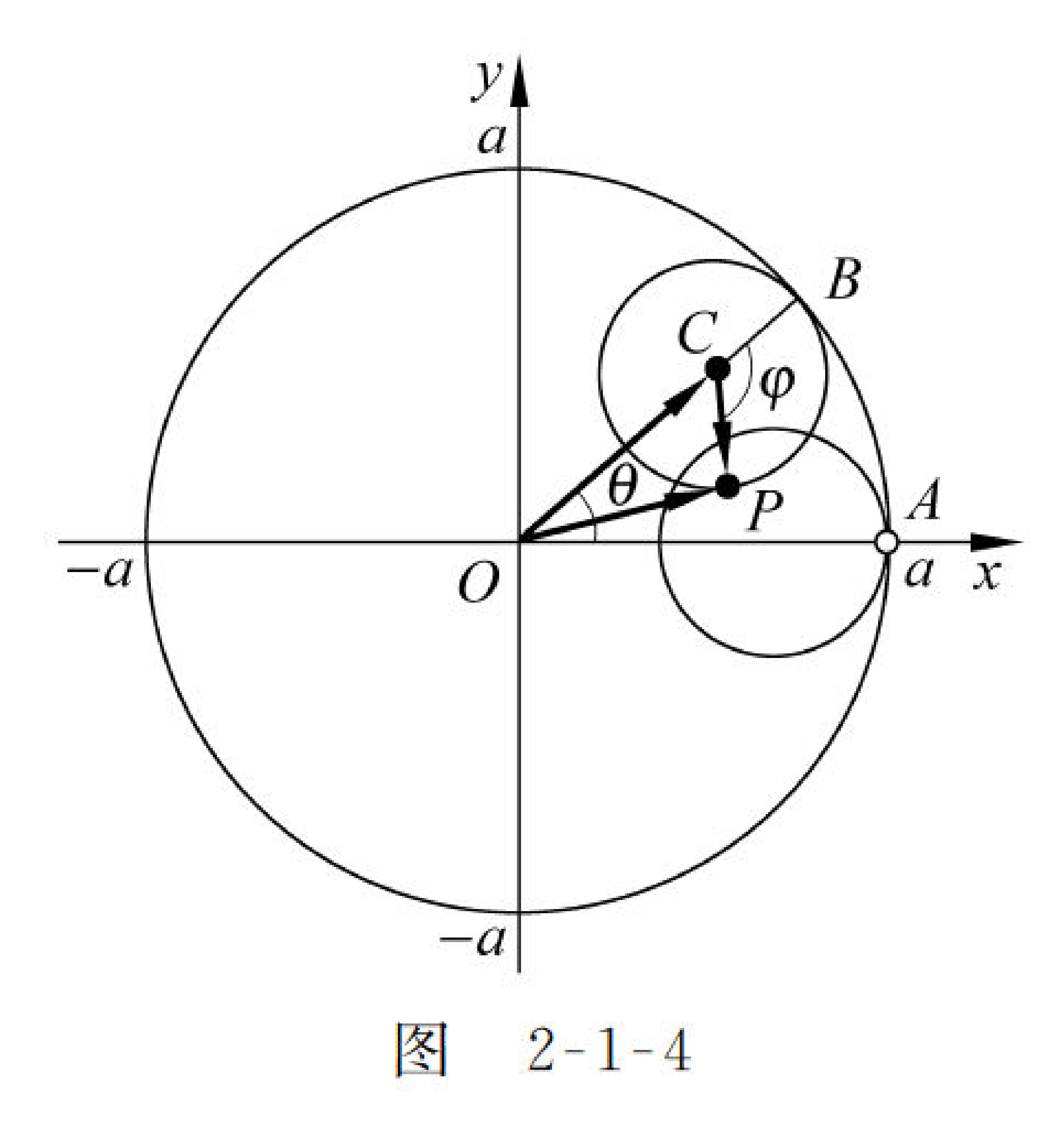


图　2-1-4

解　如图 2-1-4 所示,设动点 P 开始运动时与 A 点重合,运动后大小圆的触点为 B,则 $OB=a$, $CB=b$,且

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP},$$

设 $\theta=\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{OC})$, $\varphi=\measuredangle(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB})$,那么

$$\overrightarrow{OC}=(a-b)\cos\theta\,\vec{i}+(a-b)\sin\theta\,\vec{j},$$

且 $a\theta=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}=b\varphi$,所以 $\varphi=\dfrac{a}{b}\theta$,于是

$$\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{CP})=\theta-\varphi=\frac{b-a}{b}\theta.$$

从而$\overrightarrow{CP}=b\cos\frac{b-a}{b}\theta\,\vec{i}+b\sin\frac{b-a}{b}\theta\,\vec{j}$,故

$$\vec{r}=\left[(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{b-a}{b}\theta\right]\vec{i}+\left[(a-b)\sin\theta+b\sin\frac{b-a}{b}\theta\right]\vec{j}$$

为所求,其中 $\theta\in(-\infty,+\infty)$. 化为坐标式参数方程是

$$\begin{cases}x=(a-b)\cos\theta+b\cos\dfrac{b-a}{b}\theta,\\ y=(a-b)\sin\theta+b\sin\dfrac{b-a}{b}\theta.\end{cases}$$

当 $a=4b$ 时,利用公式

$$\begin{cases}\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{cases}$$

内摆线方程为$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$这条曲线称为**四尖点星形线**,如图 2-1-5 所示.

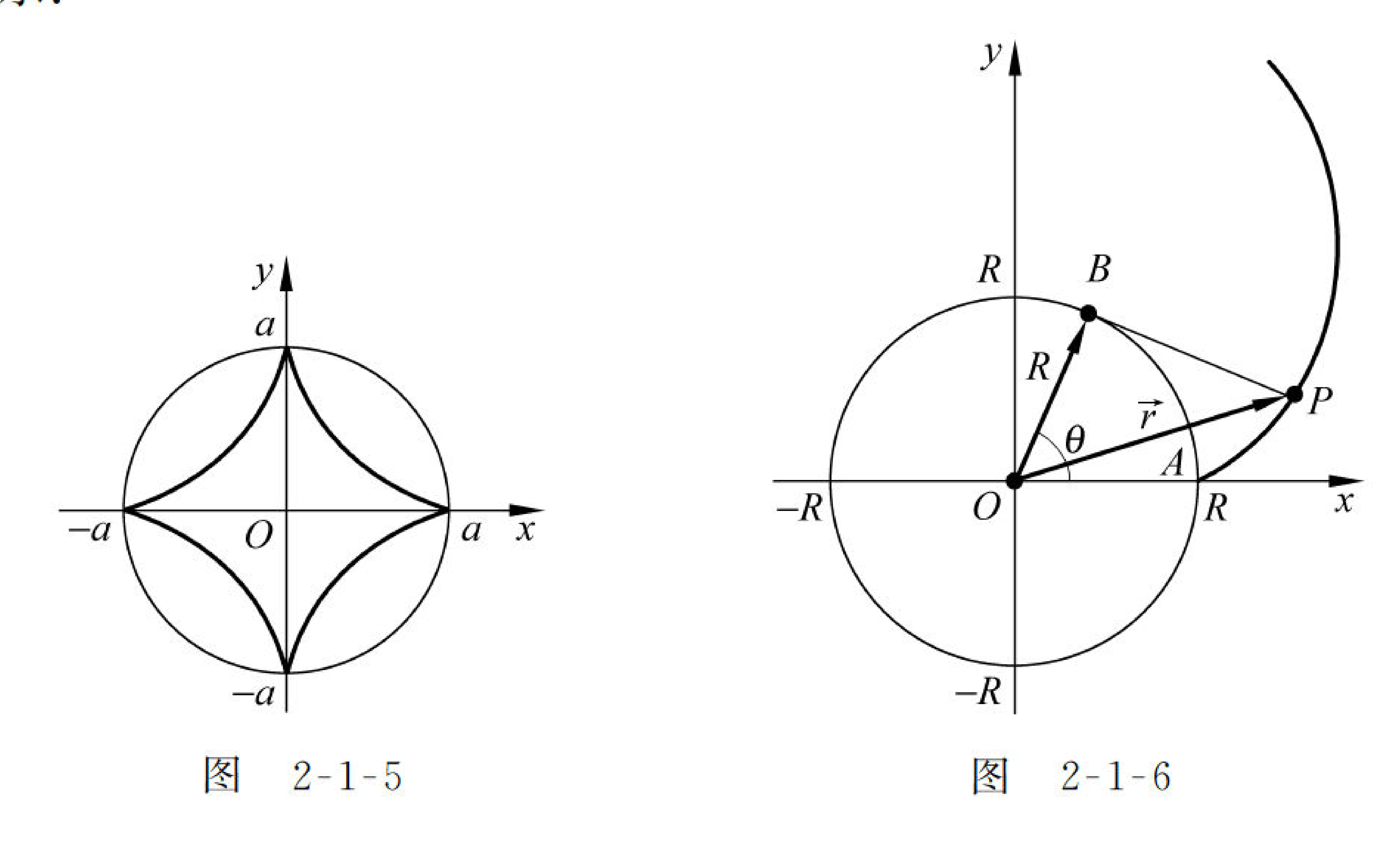


图 2-1-5　　图 2-1-6

例 2.1.5　把线绕在一个固定的圆周上,将线头拉紧从圆周上解放出来,即放出部分与圆周相切,求线头的轨迹.

解　如图 2-1-6 所示,设圆的半径为 R,线头 P 的初始位置在

圆周 A 点，以圆心为原点，OA 为 x 轴，经某一过程后切点移到 B 点，BP 为圆的切线，则

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP},$$

设 $\theta=\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{OB})$，则

$$\overrightarrow{OB}=R\cos\theta\vec{i}+R\sin\theta\vec{j}.$$

而 $\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{OP})=\theta-\frac{\pi}{2}$，

$$|\overrightarrow{BP}|=\overset{\frown}{AB}=R\theta,$$

所以

$$\overrightarrow{BP}=R\theta\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right]=R\theta(\sin\theta\vec{i}-\cos\theta\vec{j}).$$

故 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)\vec{i}+R(\sin\theta-\theta\cos\theta)\vec{j}$ 为所求. 化为坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta).\end{cases}$$

此曲线称为圆的**渐伸线**或**切展线**. 这种曲线在工业上常被采用，并称为**齿轮曲线**.

3. 普通方程与参数方程的互换

消去曲线参数方程中的参数就得到普通方程，寻找参数 t，由普通方程 $F(x,y)=0$ 找出 x,y 与 t 的关系式就得到曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$$

注意　(1) 曲线参数方程不一定都能化为普通方程；

例如：$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t+t,\\ y=t+\sin t.\end{cases}$

(2) 普通方程化为参数方程时，参数不唯一；

例如，把椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 化为参数方程.

当取 $x=a\cos\theta$，则 $y=\pm b\sin\theta$，由四个象限上 x,y 的符号可得

参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

如取 $y=tx+b$,由椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}, \\ y = \dfrac{b(b^2-a^2t^2)}{b^2+a^2t^2}, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

(3) 普通方程与参数方程互换时,要与原曲线一致.

例如:$\begin{cases} x=t^4, \\ y=t^2, \end{cases}(-\infty<t<+\infty)$与 $y^2=x$ 不一致,实因:

$$\begin{cases} x = t^4, \\ y = t^2, \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty) \Leftrightarrow y^2 = x(x \geqslant 0).$$

习　题　2.1

1. $\triangle ABC$ 底边的两个端点坐标为 $B(-3,0)$,$C(3,0)$,顶点 A 在直线 $7x-5y-35=0$ 上移动,求$\triangle ABC$ 的重心的轨迹.

2. 一动点 P 到 $A(3,0)$的距离等于它到 $B(-6,0)$的距离的一半,求此动点的轨迹方程.

3. 一动点到两定点的距离和等于定值 m^2,求此动点的轨迹.

4. 将下列参数方程化为普通方程:

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=2at, \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty$;

(2) $\begin{cases} x=\sin t+5, \\ y=-2\cos t-1, \end{cases} \quad 0\leqslant t<2\pi$;

(3) $\begin{cases} x=R(3\sin t+\cos 3t), \\ y=R(3\sin t-\sin 3t), \end{cases} \quad 0\leqslant t<2\pi$.

5. 化普通方程为参数方程:

(1) $y^2=x^3$;

(2) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}(a>0)$;

(3) $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$.

2.2　曲面的方程

1. 曲面的一般方程

定义 2.2.1　如果三元方程 $F(x,y,z)=0$ 或二元函数 $z=f(x,y)$ 与空间曲面 Σ 满足:

(1) 满足方程或函数的有序数组 (x,y,z) 对应的点在 Σ 上;

(2) 曲面 Σ 上任一点的坐标 (x,y,z) 满足方程或函数,则称方程 $F(x,y,z)=0$ 或函数 $z=f(x,y)$ 为曲面 Σ 的**一般方程**,曲面 Σ 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 或函数 $z=f(x,y)$ 的**图形**.

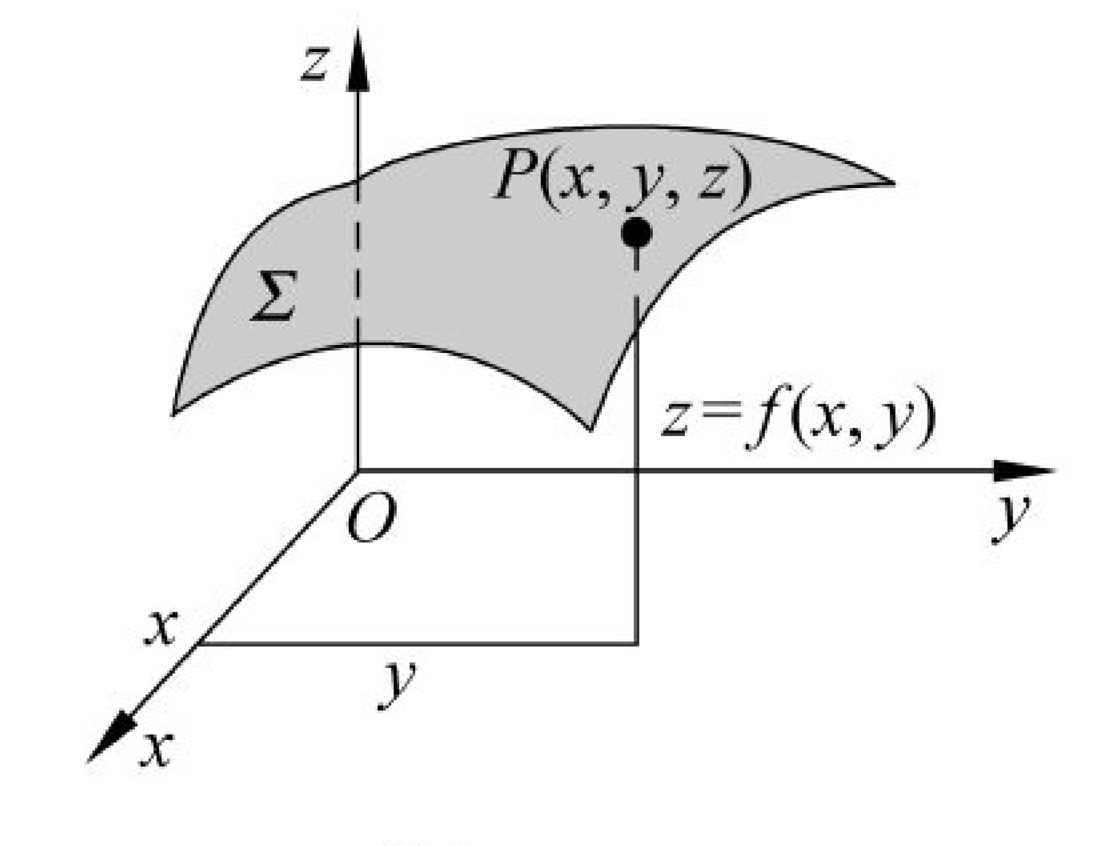


图　2-2-1

如图 2-2-1 所示,在直角坐标系下,曲面 Σ 由函数 $z=f(x,y)$ 给出.

如果曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 没有实点满足,这时我们称它为虚曲面,如 $x^2+y^2+z^2+1=0$. 有时方程只表示空间一点,如

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

有时方程只表示空间一条线,如

$$x^2+y^2=0.$$

但函数 $z=f(x,y)$ 或方程 $F(x,y,z)=0$ 一般表示空间一张曲面.

例 2.2.1　今有两点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,4)$,求线段 AB 的垂直平分面.

解　设到 A, B 两点距离相等的点为 $P(x,y,z)$,则

$$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$,此即所求(参见图 2-2-2).

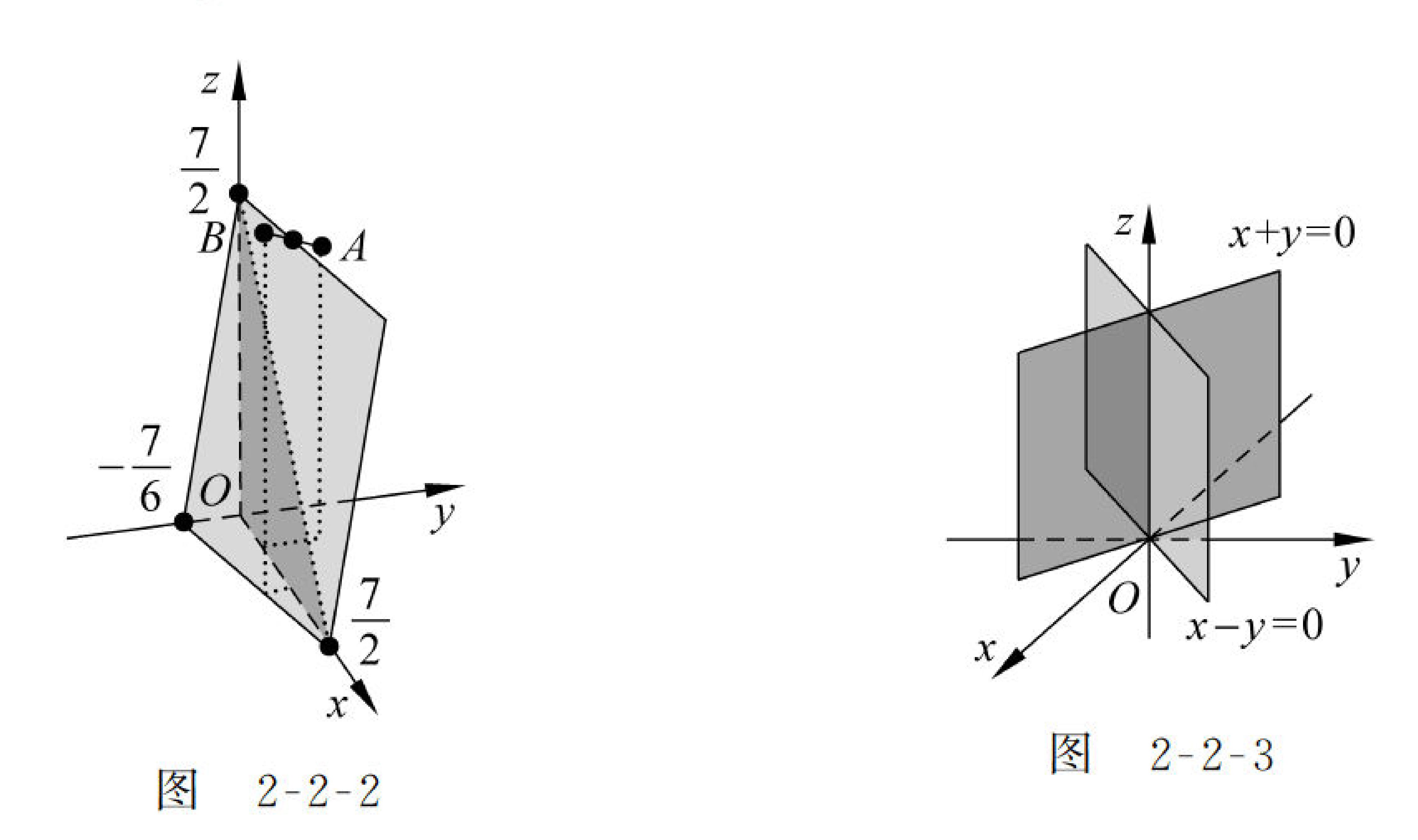


图 2-2-2

图 2-2-3

例 2.2.2 求两坐标面 xOz,yOz 所成二面角的平分面的方程.

解 因为动点 $P(x,y,z)$在平分面上$\Leftrightarrow|y|=|x|$. 所以

$$y=\pm x,$$

即 $x\pm y=0$ 为所求(参见图 2-2-3).

在图 2-2-2 中,我们用三角形表示平面,在图 2-2-3 中,我们用平行四边形表示平面,也就是说,平面是无边界的,这里用了绘图的一种技巧,即用“框图”表示面.

例 2.2.3 坐标面 yOz 的方程是 $x=0$.

例 2.2.4 平行于坐标面 xOz 且经过点 $P_0(a,b,c)$的平面方程是

$$y=b.$$

例 2.2.5 求球心为 $C(a,b,c)$,半径为 R 的球面方程.

解 设动点为 $P(x,y,z)$,则$|\overrightarrow{PC}|=R$,即

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

为所求.

将球面方程展开后得

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0,$$

由此可知，球面方程是一个平方项的系数相等且不含交叉项的三元二次方程. 反过来，当 $R^2-(a^2+b^2+c^2)>0$ 时，其是球面方程；当 $R^2-(a^2+b^2+c^2)=0$ 时，其是一点，称为点球；当 $R^2-(a^2+b^2+c^2)<0$ 时无图，称为虚球面.

2. 曲面的参数方程

平面上的点有两个自由度，即由上、下两个方位就可以确定其位置，所以用二元有序数对 (x,y) 确定点. 当平面上的点受到某一方程 $F(x,y)=0$ 的约束后，其只有一个自由度，所得到的图形一般是平面上的一条曲线. 所以平面曲线的参数方程只有一个参变元

$$\vec{r}=\vec{r}(t).$$

而空间的点有三个自由度，当受到某方程 $F(x,y,z)=0$ 的约束后，其只有两个自由度，所得到的图形一般是空间一张曲面，所以空间曲面的参数方程有两个参变元.

定义 2.2.2　如果 $\forall u\in[a,b]$，$\forall v\in[c,d]$，向径 $\vec{r}(u,v)$ 的终点在曲面 Σ 上，又 $\forall P\in\Sigma$，$\exists u\in[a,b]$，$\exists v\in[c,d]$，$\ni$“$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(u,v)$”，则称 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 为曲面 Σ 的向量式参数方程，其中 u,v 称为参数.

因为向径的坐标为 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，所以曲面 Σ 的坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v).\end{cases}$$

例 2.2.6　求球心在原点，半径为 R 的球面参数方程与一般方程.

解　如图 2-2-4 所示，设球面的动点为 $P(x,y,z)$，P 在 xOy 平面上的投影为 Q，取参数为 $\angle(\vec{k},\overrightarrow{OP})=\varphi$，$\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{OQ})=\theta$，其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则

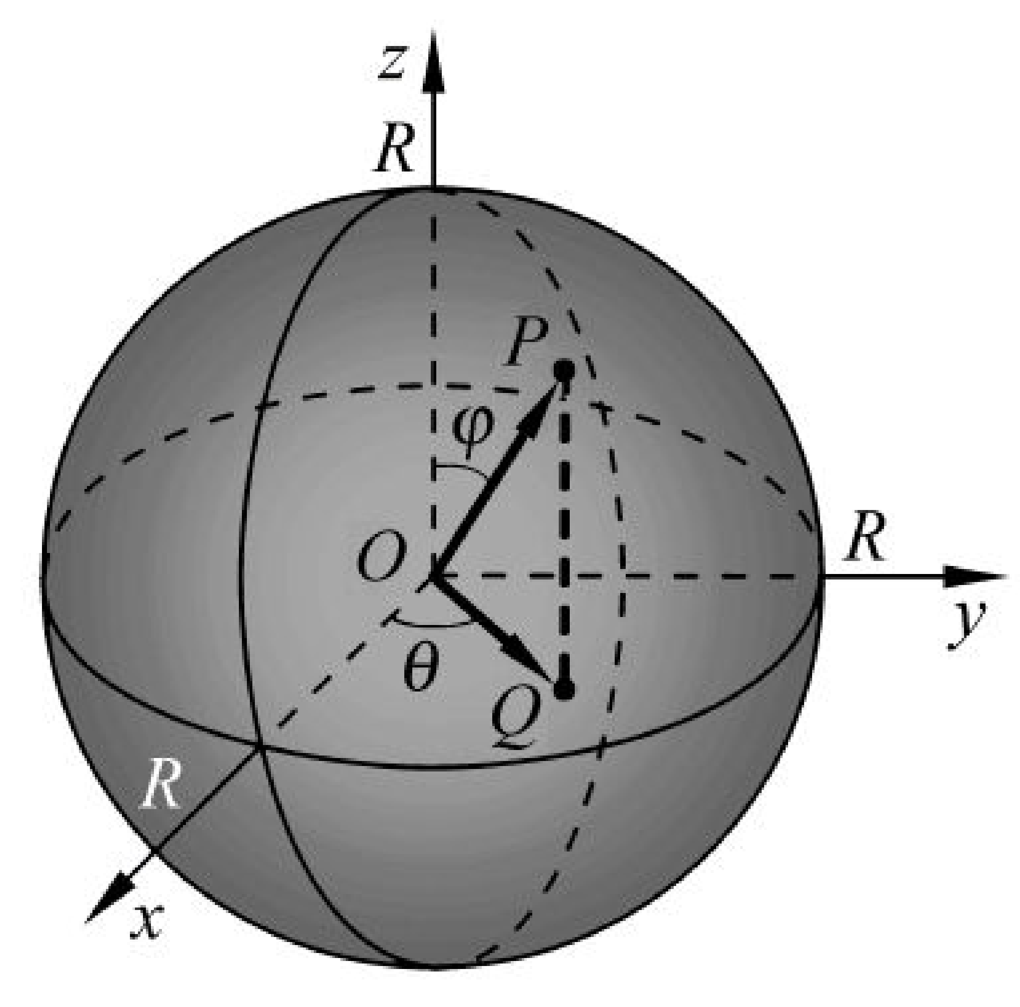


图　2-2-4

$$OQ = R\sin\varphi,$$

于是球面的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \\ z = R\cos\varphi, \end{cases}$$

向量式参数方程为

$$\vec{r} = R\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + R\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + R\cos\varphi\,\vec{k}.$$

消掉参数即得一般方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

例 2.2.7 求以 z 轴为中心轴，半径为 R 的柱面参数方程与一般方程.

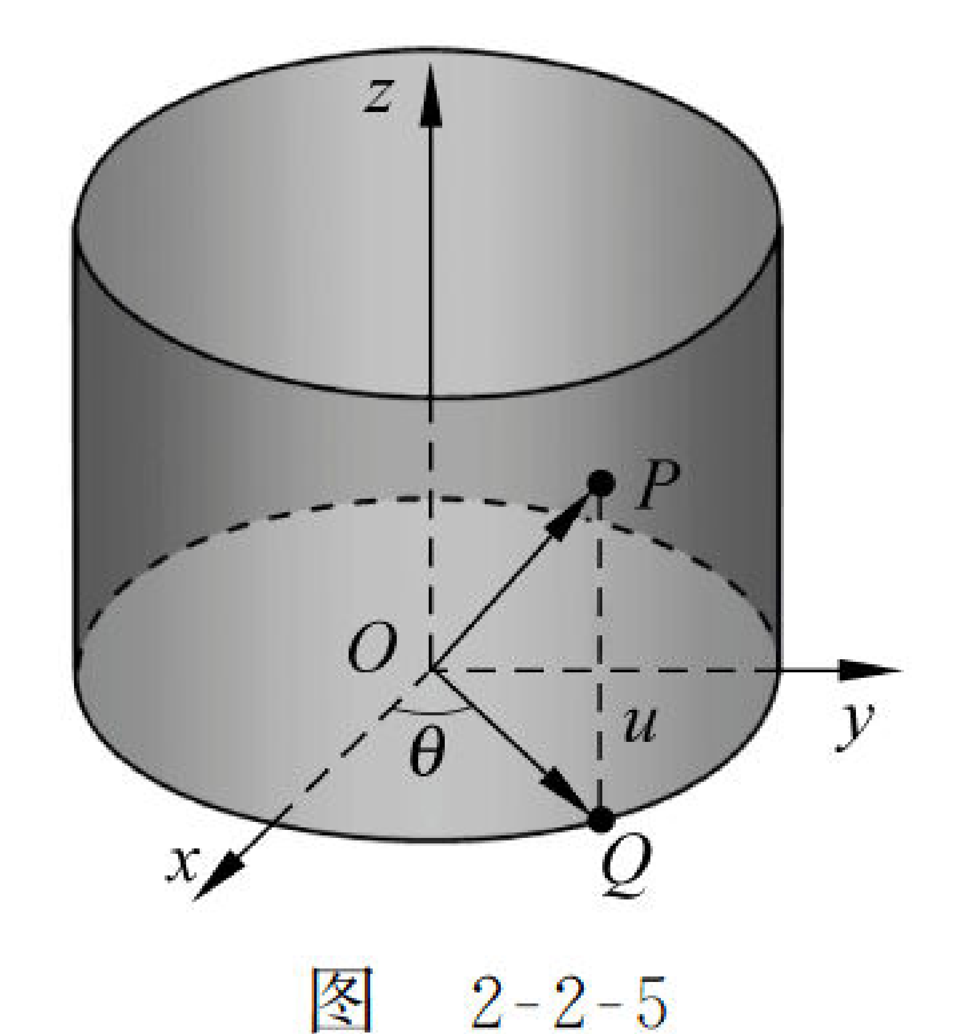


图 2-2-5

解 如图 2-2-5 所示，设柱面上的动点为 $P(x,y,z)$，P 点在 xOy 平面上的投影为 Q，取参数为

$$u = z, \quad \measuredangle(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) = \theta,$$

其中 $-\infty<u<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则

$$\overrightarrow{OQ} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j},$$

于是参数式方程为

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + u\vec{k}.$$

坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \\ z = u \end{cases}$$

消去参数得一般方程

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

3. 球坐标

空间中的任意一点 P 的位置由有序数组 (r,θ,φ) 给出，其意义如图 2-2-6 所示，有序数组 (r,θ,φ) 称为球面坐标. 其与空间直角坐

标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

球坐标系中的坐标面

当 $r=r_0$（常数）时，坐标面为球面；

当 $\varphi=\varphi_0$（常数）时，坐标面为锥面；

当 $\theta=\theta_0$（常数）时，坐标面为半平面（参见图 2-2-7）.

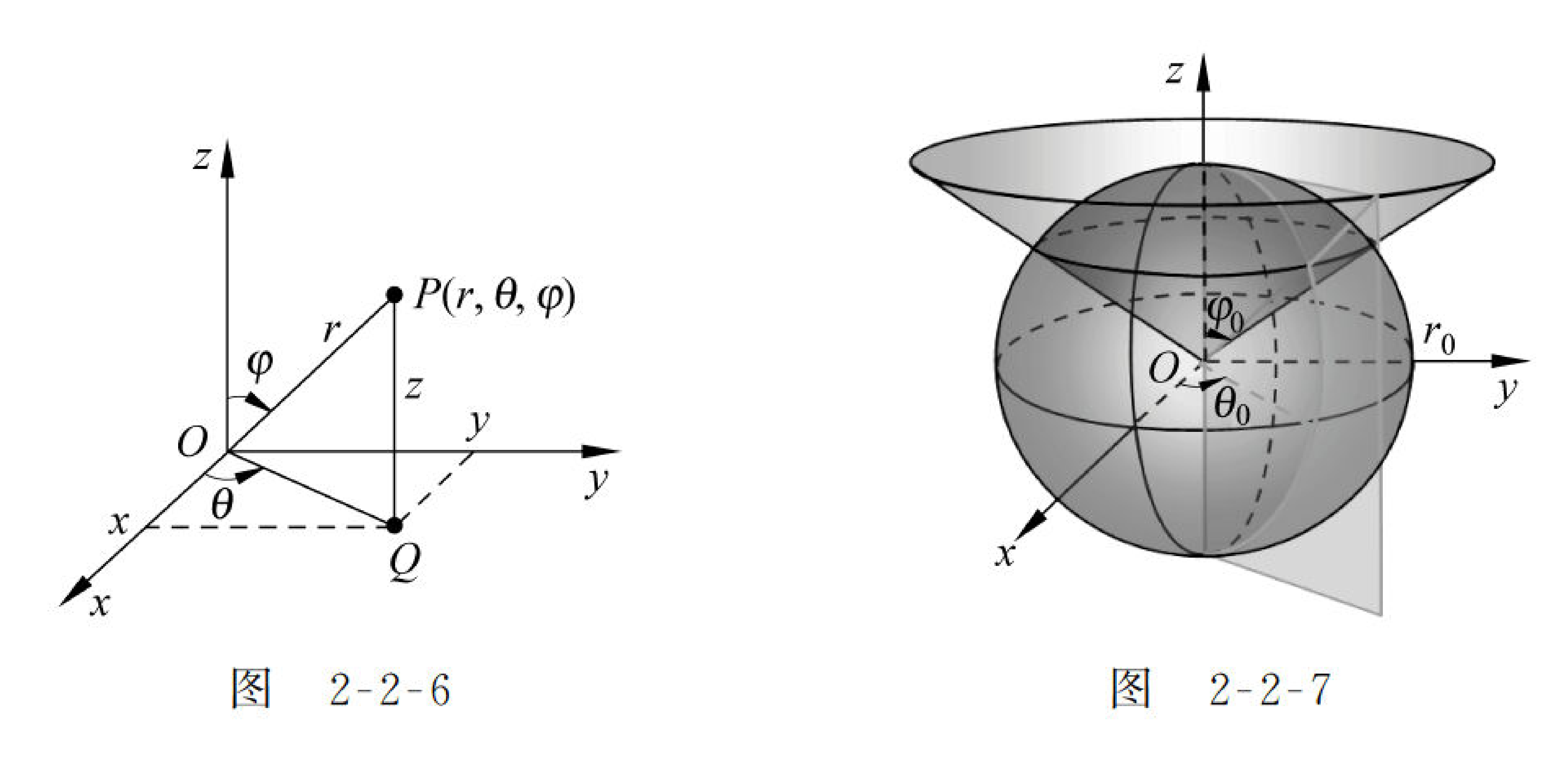


图　2-2-6　　　　图　2-2-7

4. 柱坐标

空间中的任意点 P 的位置由 3 个参数 (r,θ,z) 给出，其意义由图 2-2-8 所示，(r,θ,z) 称为柱面坐标.

从其与空间直角坐标系的关系得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

其中 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi, -\infty<z<+\infty$.

柱坐标系中的坐标面

当 $r=r_0$（常数）时，坐标面为柱面；

当 $z=z_0$（常数）时，坐标面为平面；

当 $\theta=\theta_0$（常数）时，坐标面为半平面(参见图 2-2-9).

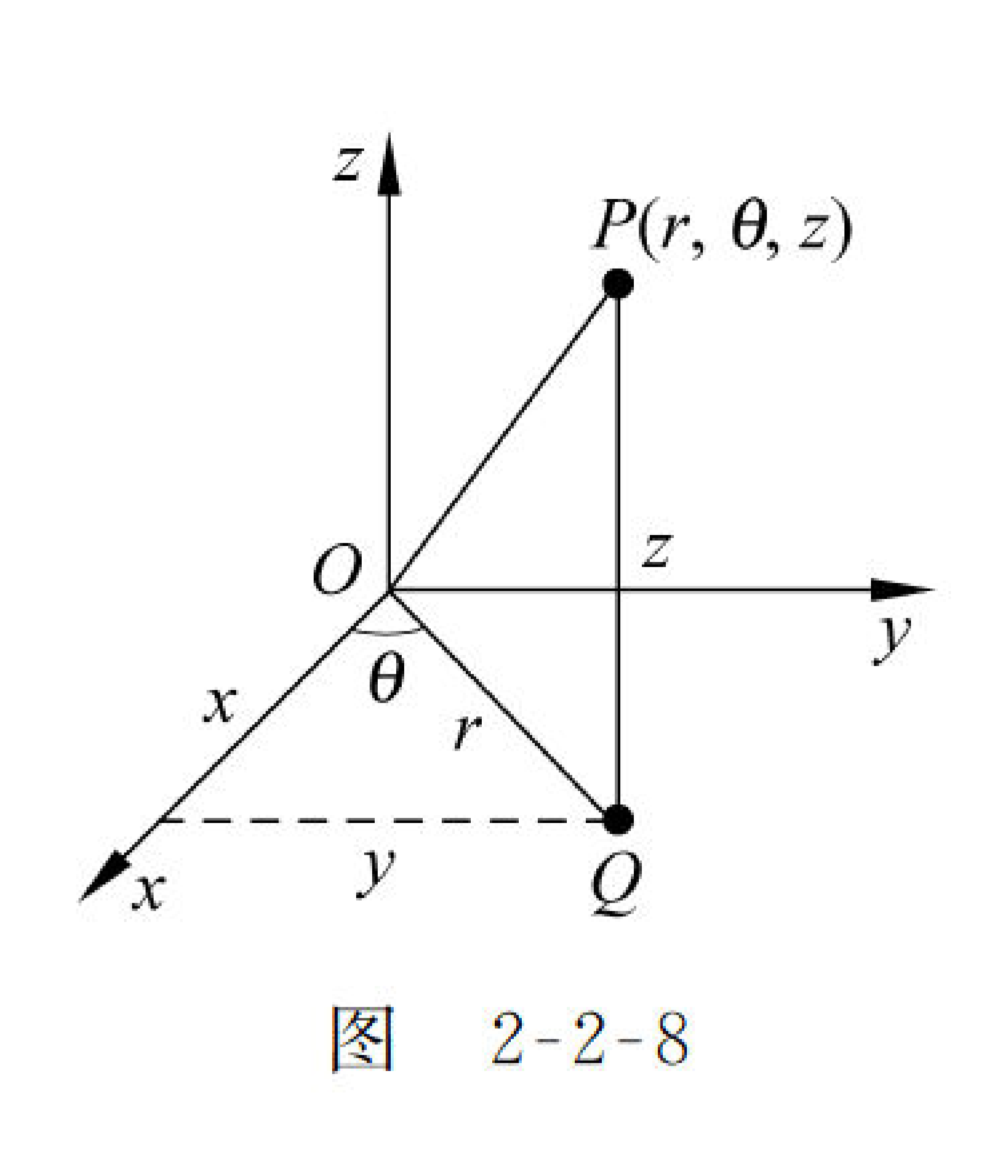


图　2-2-8

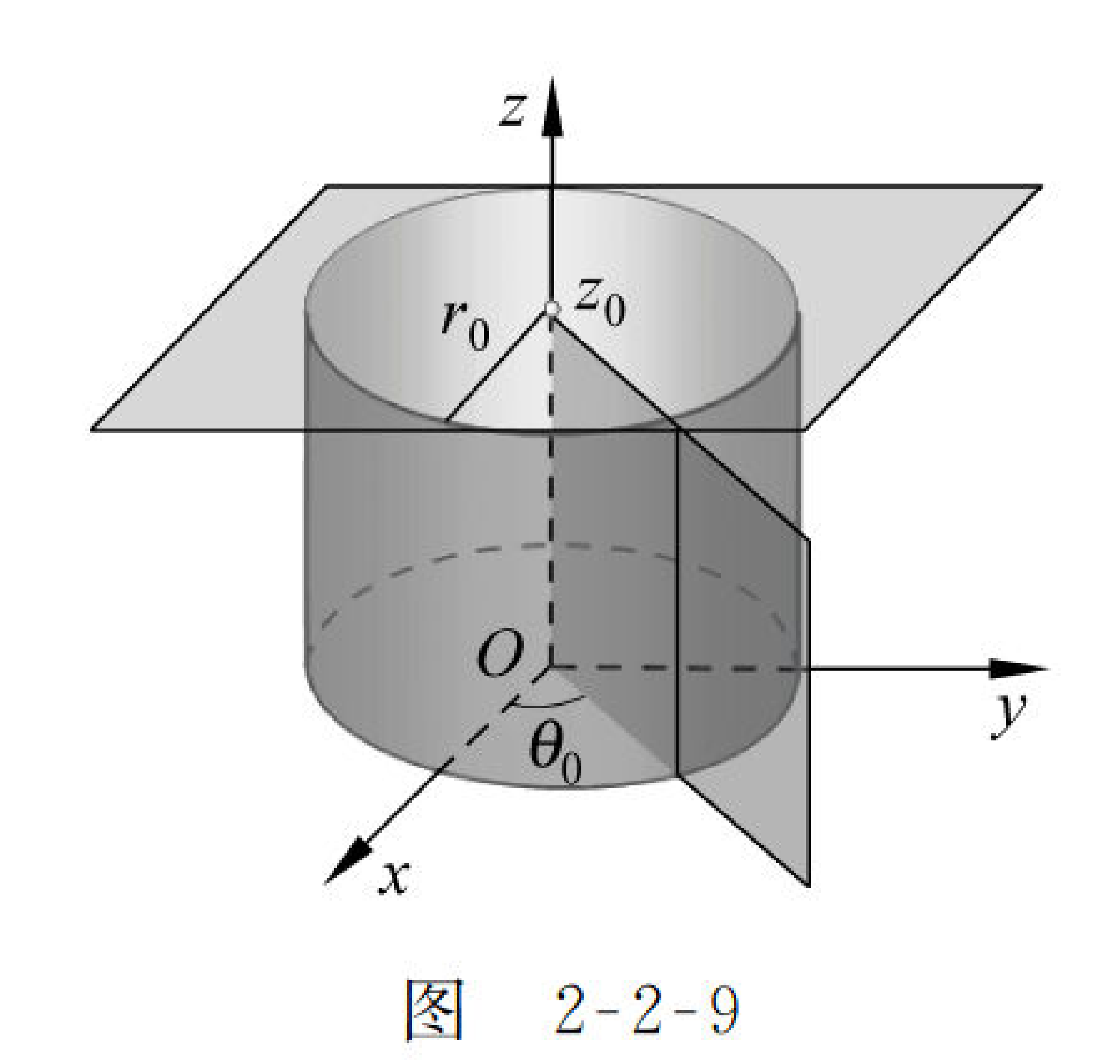


图　2-2-9

习　题　2.2

1. 求到 $A(4,0,0)$与到坐标面 xOy 的距离相等的点的轨迹.

2. 在空间选择适当的坐标系，求下列点的轨迹方程：

(1) 到两个定点的距离之比等于常数的点的轨迹；

(2) 到两个定点的距离之和等于常数的点的轨迹；

(3) 到两个定点的距离之差等于常数的点的轨迹.

3. 求下列各球面的方程：

(1) 球心在原点且过点$(6,-2,3)$；

(2) 一条直径的两个端点是$(2,-3,5)$和$(4,1,-3)$；

(3) 通过原点与$(4,0,0)$，$(1,3,0)$，$(0,0,-4)$.

4. 求下列球面的球心与半径：

(1) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$；

(2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$.

5. 求球心在 $C(a,b,c)$，半径为 R 的参数方程.

6. 消去下列参数方程中的参数 u,v，化为一般方程：

(1) $\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=\sqrt{1-u^2-v^2}, \end{cases}$ $u^2+v^2\leqslant 1$;

(2) $\begin{cases} x=a\cos u, \\ y=a\sin u, \\ z=v, \end{cases}$ $0\leqslant u<2\pi$，$-\infty<v<+\infty$.

7. 在球坐标系中，下列方程表示什么图形？

(1) $r=5$；　(2) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$；　(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

8. 在柱坐标系中，下列方程表示什么图形？

(1) $r=2$；　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$；　(3) $z=-1$.

2.3　空间曲线的方程

1. 空间曲线的一般方程

定义 2.3.1　如果三元方程组 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 与空间曲线 L 满足：

(1) 满足方程组的有序数组 (x,y,z) 对应的点在曲线 L 上；

(2) 曲线 L 上任一点的坐标 (x,y,z) 满足方程组.

则称方程组 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 为空间曲线 L 的**一般方程**.

空间曲线

$$L:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

可理解为两张曲面

$$F_1(x,y,z)=0 \quad 与 \quad F_2(x,y,z)=0$$

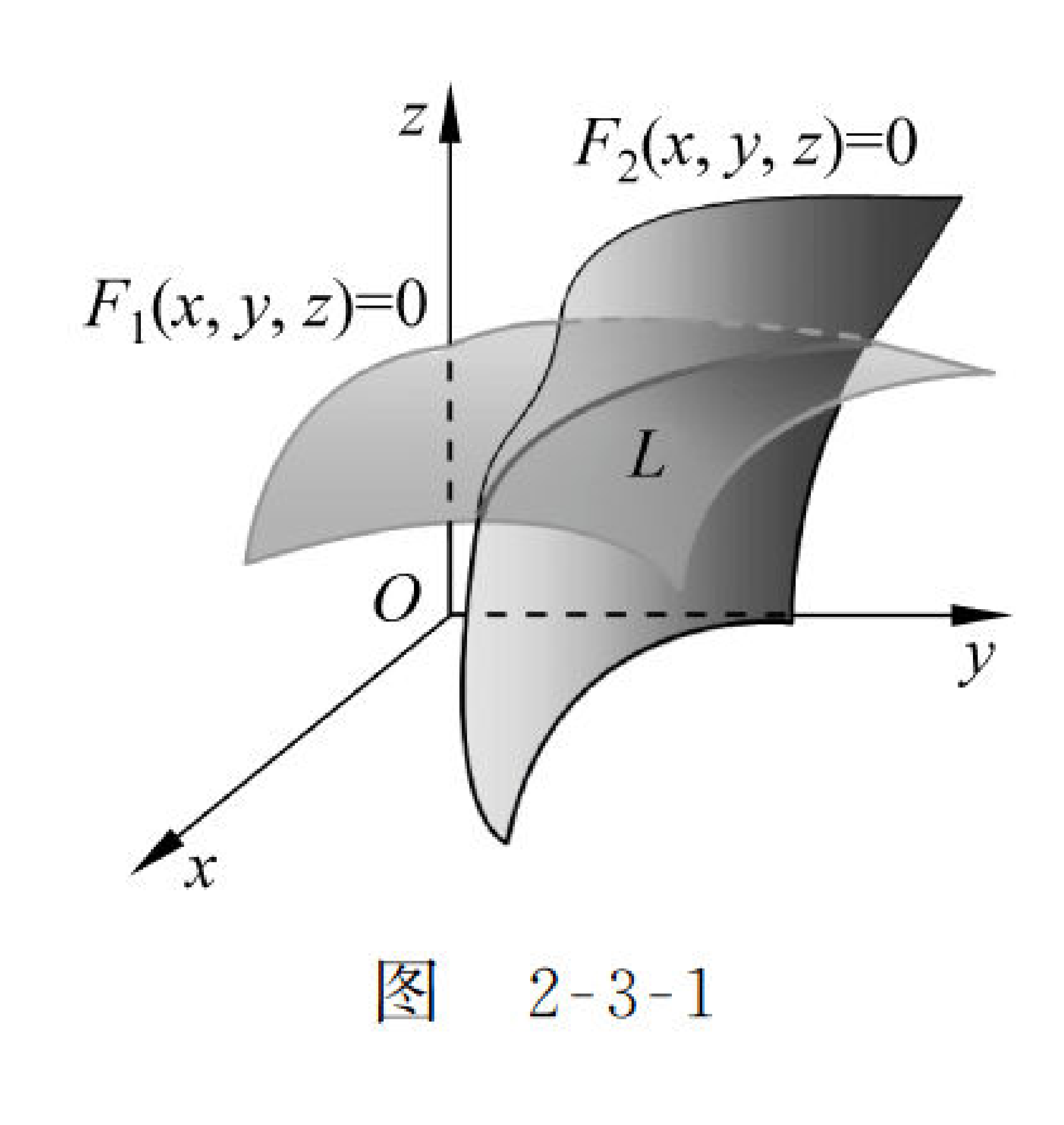


图 2-3-1

的交线(如图 2-3-1 所示),所以一般方程由方程组给出.

从代数上知道,方程组可以进行同解变形.所以曲线的一般方程可以用不同形式的方程组来表达,但表达同一条曲线的方程组是等价的.例如 z 轴可表为$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$也可以表为

$$\begin{cases}x+y=0,\\x-y=0.\end{cases}$$

例 2.3.1 在坐标平面 xOy 上,半径为 R 的圆可表为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=0,\\z=0,\end{cases}$$

也可以表为$\begin{cases}x^2+y^2=0,\\z=0.\end{cases}$

例 2.3.2 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与椭圆柱面 $z^2+3x^2=1$ 的交线(参见图 2-3-2)可由方程组

$$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\z^2+3x^2=1\end{cases}$$

给出,也可由方程组

$$\begin{cases}z=\sqrt{1-3x^2},\\4x^2+y^2=1\end{cases}$$

给出.其中

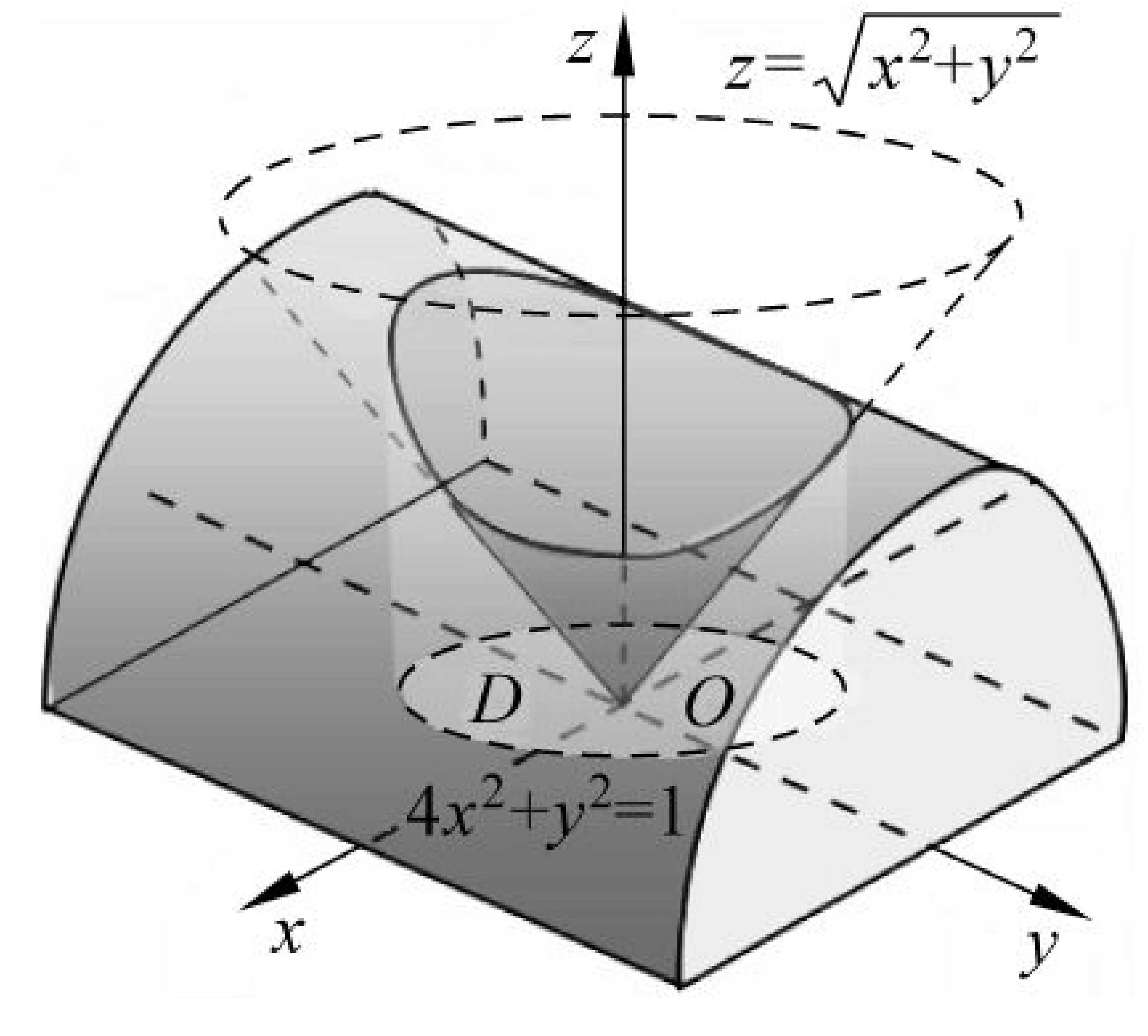


图 2-3-2

$$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\z^2+3x^2=1\end{cases}$$

是锥面与柱面的交线,$\begin{cases}z=\sqrt{1-3x^2},\\4x^2+y^2=1\end{cases}$是柱面与柱面的交线.

例 2.3.3 抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

其是平面 $x+y+z=1$ 上的一个椭圆(参见图 2-3-3).

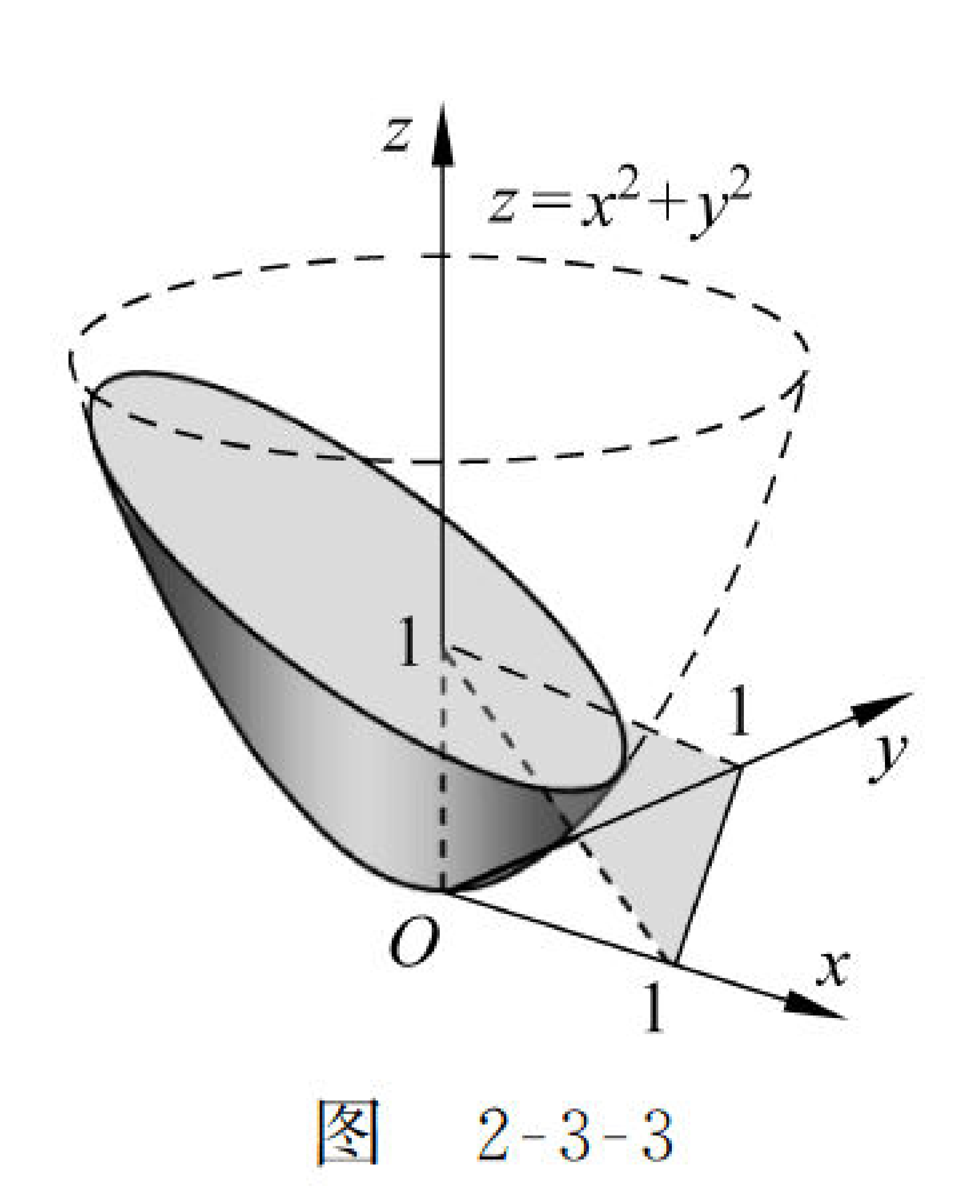


图　2-3-3

2. 空间曲线的参数方程

空间中的点有三个自由度,当受到方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

的约束后,其只有一个自由度,所以空间曲线的参数方程是一个参变元的方程. 即向量式参数方程为

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad 或 \quad \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \\ z = z(t), \end{cases}$$

例 2.3.4　一个质点一方面绕 z 轴作等角速度的圆周运动,另一方面平行于 z 轴作匀速直线运动,求此质点运动的轨迹.

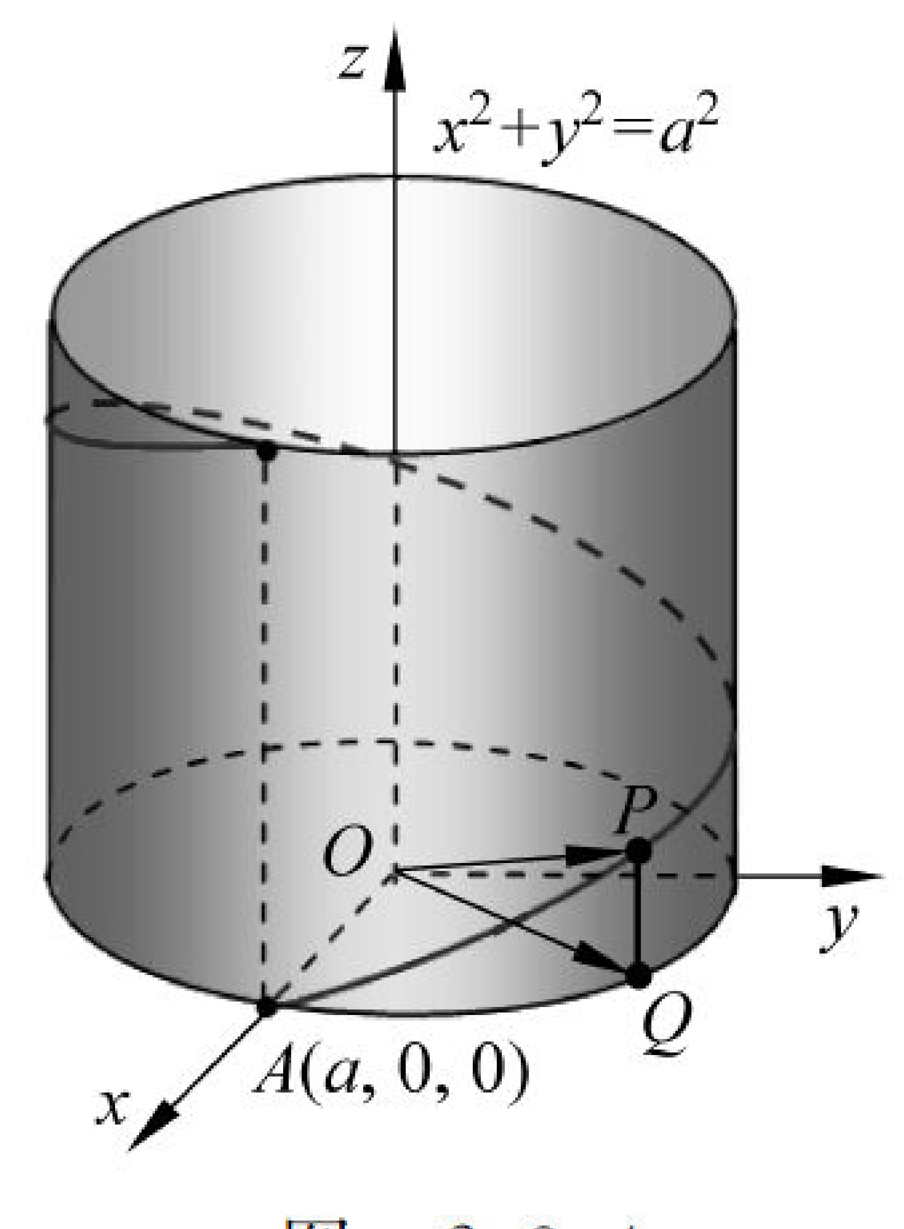


图　2-3-4

解　如图 2-3-4 所示,设质点运动的起点为 $A(a,0,0)$,角速度为 ω,在 t 秒后运动到 P 点. P 点在 xOy 平面上的投影为 Q,取

$$\theta = \omega t = \measuredangle(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}),$$

则$\overrightarrow{OQ} = b\omega t\,\vec{k} = b\theta\,\vec{k}$,而 $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$,所以

$$\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + a\sin\omega t\,\vec{j} + b\omega t\,\vec{k}$$

为所求的向量式参数方程.

坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \quad \theta \in (-\infty, +\infty), \\ z = b\theta, \end{cases}$$

消去参数后得一般方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}. \end{cases}$$

此方程组可化为 $x^2+y^2=a^2$，这说明所求曲线在圆柱面上，故称此曲线为**圆柱螺旋线**.

习　题　2.3

1. 平面 $x=C$ 与 $x^2+y^2-2x=0$ 的交线是什么图形？

2. 指出下列曲面与坐标面的交线是什么图形？

(1) $x^2+y^2+16z^2=64$；

(2) $x^2+4y^2-16z^2=64$；

(3) $x^2-4y^2-16z^2=64$；

(4) $x^2+9y^2=10z$.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} y^2-4x=0, \\ x+z^2=0 \end{cases}$ 的参数方程.

4. 把下列曲线的参数方程化为一般方程：

(1) $\begin{cases} x=6t+1, \\ y=(t+1)^2, \quad -\infty<t<+\infty; \\ z=2t, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=5\sin t, \quad 0\leqslant t<2\pi. \\ z=4\cos t, \end{cases}$



第3章

平面与空间直线

平面与空间直线是空间中最简单的图形，这一章用向量去研究这些简单而又最基本的图形，从而建立平面与空间直线在直角标架下的方程，以及讨论它们的位置关系.

3.1 平面的方程

1. 平面的点位式方程

利用“两条相交直线可以确定且只能确定一个平面”的结论，我们现转为用向量来讨论，从而建立平面的点位式方程.

定义 3.1.1 在空间给一定点 P_0 与两个线性无关的向量 $\vec{a},\vec{b}$，那么可以唯一确定通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与 $\vec{a},\vec{b}$ 平行的平面 π，向量 $\vec{a},\vec{b}$ 称为平面 π 的**方位向量**.

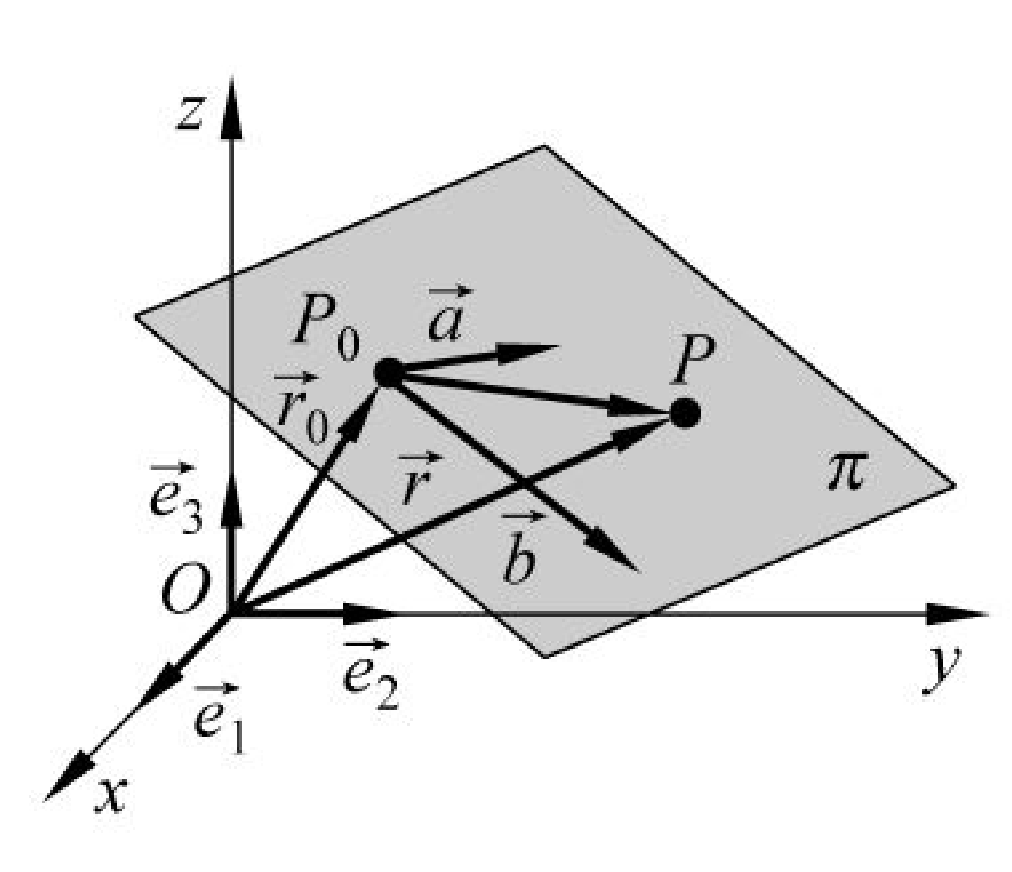


图 3-1-1

取仿射标架 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$，如图 3-1-1 所示，设平面 π 上的动点为 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{P_0P}=u\vec{a}+v\vec{b}$，令 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$，$\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$，由此得平面 π 的向量式参数方程为

$$\vec{r}=\vec{r}_0+u\vec{a}+v\vec{b}.$$

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

则得平面 π 的坐标式参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + ux_1 + vx_2, \\ y = y_0 + uy_1 + vy_2, \quad u,v \in (-\infty,+\infty). \\ z = z_0 + uz_1 + vz_2, \end{cases}$$

由于

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (u\vec{a}+v\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = u(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) + v(\vec{b},\vec{a},\vec{b}) = 0,$$

所以平面 π 的方程又可表示为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

用上述方法得到的平面方程都称为**平面的点位式方程**.

例 3.1.1 设空间不共线的三点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,$P_3(x_3,y_3,z_3)$,求过此三点的平面 π 的方程.

解 设动点 $P(x,y,z)\in\pi$,取方位向量为

$$\vec{a} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

$$\vec{b} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$$

且 $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{r}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$,则平面 π 的向量式参数方程为

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2-x_1) + v(x_3-x_1), \\ y = y_1 + u(y_2-y_1) + v(y_3-y_1), \quad u,v \in (-\infty,+\infty). \\ z = z_1 + u(z_2-z_1) + v(z_3-z_1), \end{cases}$$

由于$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$,所以所求平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

也可以表为 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

这些方程称为平面 π 的**三点式方程**.

作为三点式方程的特例,那就是三个点分别在三条坐标轴上,即 $P_1(a,0,0)$,$P_2(0,b,0)$,$P_3(0,0,c)$,此即平面 π 与三条坐标轴的交点(参见图 3-1-2).由三点式方程得

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0,$$

即 $bcx+acy+abz=abc$.

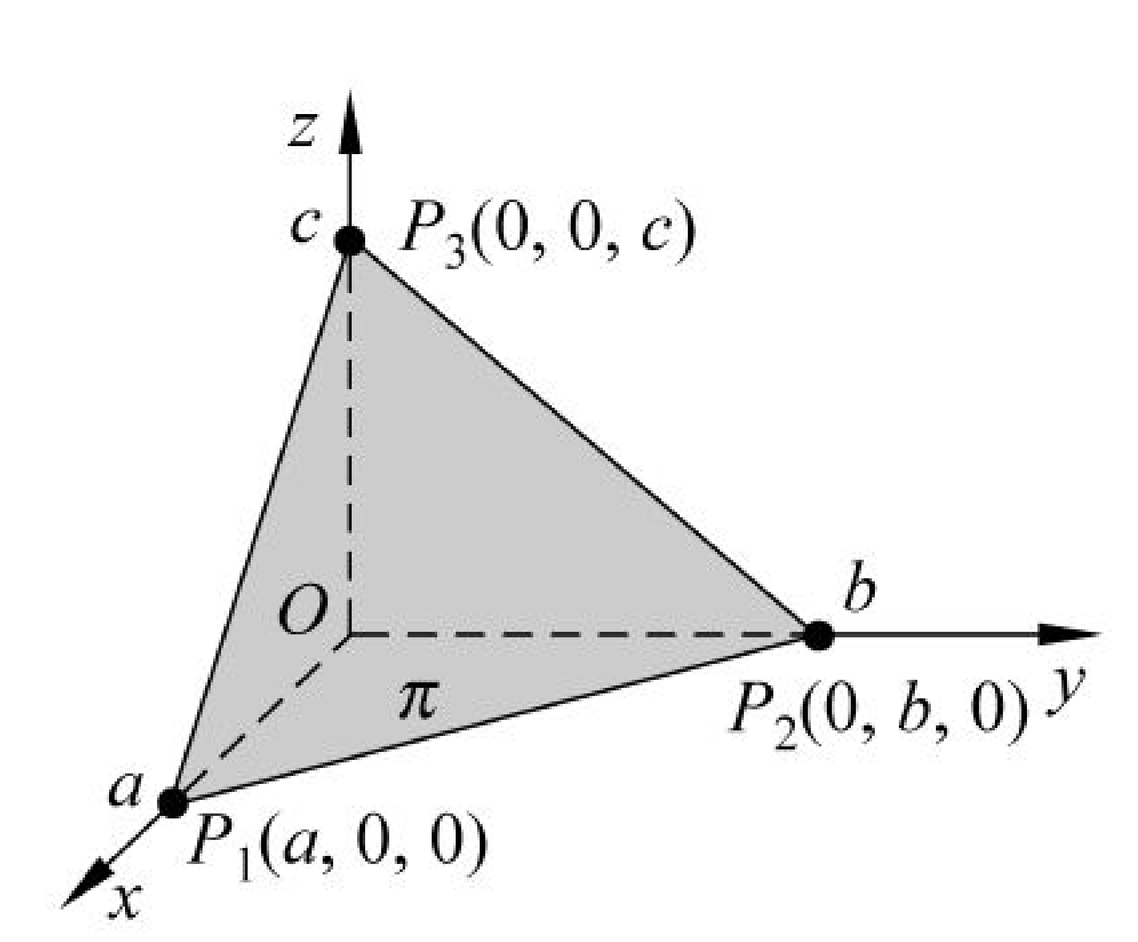


图　3-1-2

当 $abc\neq 0$ 时,得平面的**截距式方程**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

其中 a,b,c 分别称为平面在三条坐标轴上的**截距**.

2. 平面的一般方程

在平面的点位式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

中,展开后得一个三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$,其中

$$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

因为向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$不共线,所以 A,B,C 不全为零,这说明空间平面可用关于 x,y,z 的三元一次方程给出. 反过来,当 A,B,C 不全为零时,不妨设 $A\neq 0$,则由

$$Ax+By+Cz+D=0$$

得

$$A^2\left(x+\frac{D}{A}\right)+ABy+ACz=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} x+\dfrac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix}=0,$$

这说明三元一次方程表示一张平面,即下面的定理.

定理 3.1.1 空间平面的方程可表为 $Ax+By+Cz+D=0$,又三元一次方程可确定空间一张平面.

方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面 π 的**一般方程**.

由平面方程的一般方程可获得平面的几种特殊位置.

(1) $D=0\Leftrightarrow$平面 π 经过原点;

(2) $D\neq 0,A=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 x 轴
$\Leftrightarrow$平面 π 的一般方程中不含 x,

$D\neq 0,B=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 y 轴
$\Leftrightarrow$平面 π 的一般方程中不含 y,

$D\neq 0,C=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 z 轴
$\Leftrightarrow$平面 π 的一般方程中不含 z;

(3) $D\neq 0,A=0,B=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 xOy 平面,
$D\neq 0,B=0,C=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 yOz 平面,
$D\neq 0,A=0,C=0\Leftrightarrow$平面 π 平行于 xOz 平面.

例 3.1.2 求通过点 $P_1(2,-1,1)$,$P_2(3,-2,1)$,且与 z 轴平行的平面方程.

解 因为所求平面平行于 z 轴,所以平面方程为

$$Ax + By + D = 0.$$

其通过点 $P_1(2,-1,1)$,$P_2(3,-2,1)$,所以

$$\begin{cases} 2A - B + D = 0, \\ 3A - 2B + D = 0, \end{cases}$$

于是 $A:B:C = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1:1:-1$,故 $x+y-1=0$ 为所求.

3. 平面的法式方程

利用“过直线外一点可以确定且只能确定一个平面与已知直线垂直”的结论,我们现用向量来讨论,即得平面的点法式方程.

定义 3.1.2　在空间给一定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$与一个非零向量 $\vec{n}$,那么可以唯一确定通过 P_0 且与 $\vec{n}$ 垂直的平面 π,向量 $\vec{n}$ 称为平面 π 的法向量.

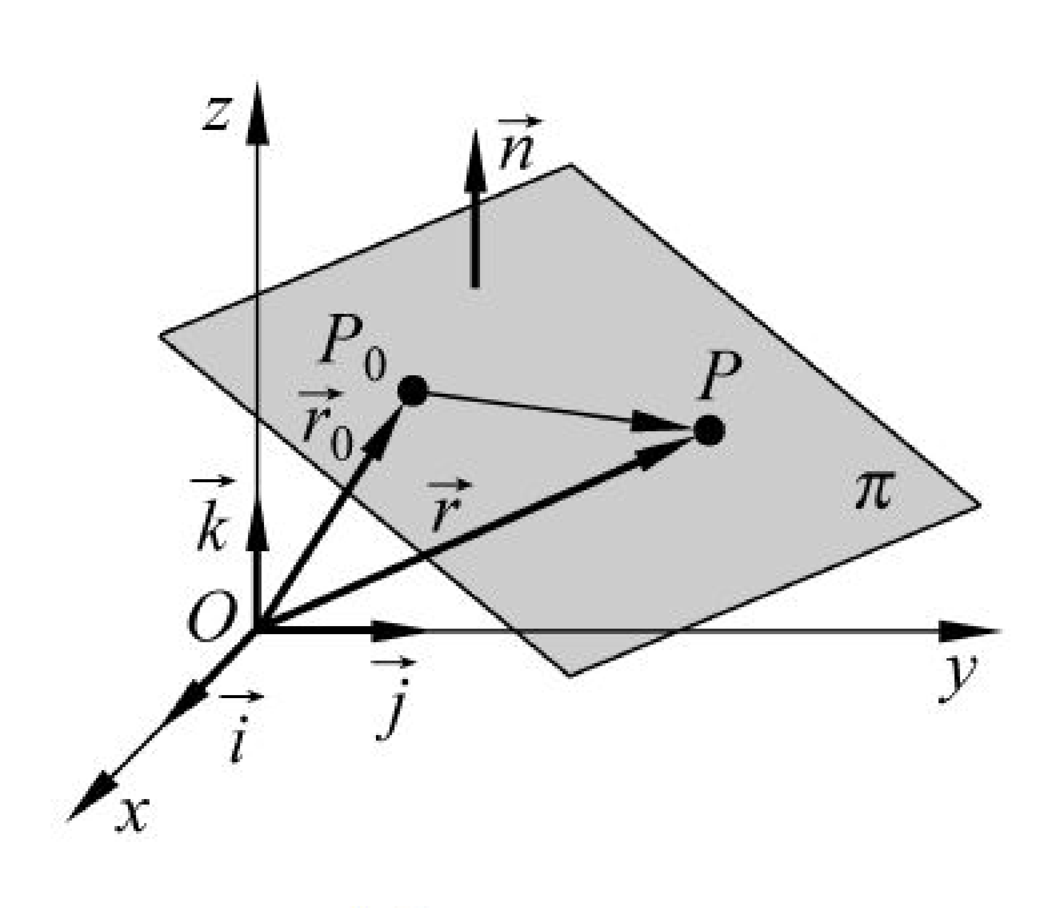


图　3-1-3

取直角标架$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$,如图 3-1-3 所示,设平面 π 上的动点为

$$P(x,y,z),$$

令 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$,$\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$,则

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n},$$

即$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$. 设 $\vec{n}=(A,B,C)$,于是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

此方程称为平面 π 的**点法式方程**.

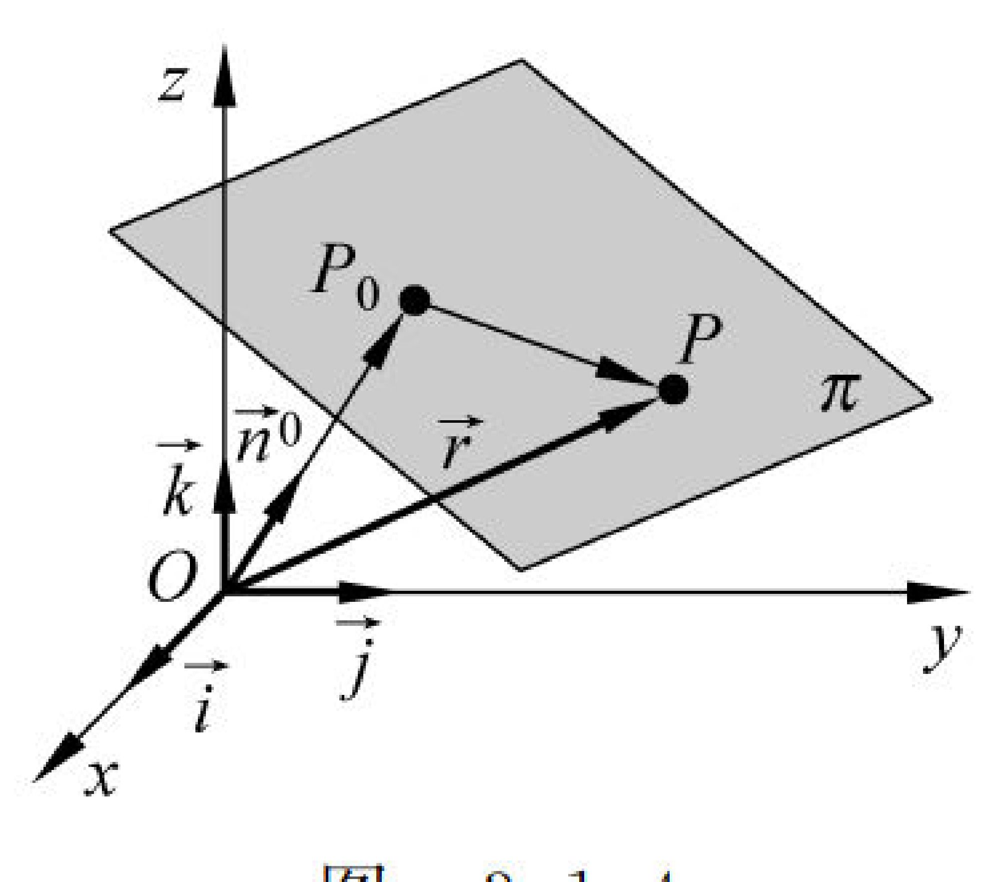


图　3-1-4

在点法式方程中可以看到,一次项系构成的有序数组正好是平面的法向量,即 $\vec{n}=(A,B,C)$.

如图 3-1-4 所示,设 P_0 点为从原点引平面 π 的垂线的垂足,则原点到平面 π 的距离为 $p=|\overrightarrow{OP_0}|$. 取法向量的单位

向量为 $\vec{n}^0$ 且与 $\overrightarrow{OP_0}$ 同向，则

$$\overrightarrow{OP_0} = p\vec{n}^0.$$

再取平面上的动点为 P，$\overrightarrow{OP}=\vec{r}$，则 $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}^0$，于是

$$\vec{n}^0\cdot(\vec{r}-p\vec{n}^0)=0,$$

即

$$\vec{n}^0\cdot\vec{r}-p=0,$$

此即平面 π 的**向量式法式方程**. 取

$$\vec{r}=(x,y,z),\quad \vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

则

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

此即平面 π 的**坐标式法式方程**，简称**法式方程**.

法式方程有两个特征.

(1) 一次项系数的平方和等于 1；

(2) 常数项非正.

就平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$，取

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

则平面方程 $\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+\lambda D=0$ 的一次项系数满足

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2+(\lambda C)^2=1.$$

再取 λ 的符号使得 $\lambda D<0$，由此可得平面一般方程到法式方程的转换，这个过程称为**法式化**. 而确定符号的 λ 称为**法式化因子**. 即平面的一般方程乘上一个法式化因子后就得到一个平面的法式方程.

例 3.1.3 已知两点 $P_1(1,-2,3)$，$P_2(3,0,-1)$，求线段 P_1P_2 的垂直平分面 π 的方程.

解 P_1，P_2 的中点为 $P_0(2,-1,1)$，平面 π 的法向量为

$$\vec{n}=(1,1,-2),$$

所以平面 π 的点法式方程为

$$(x-2)+(y+1)-2(z-1)=0.$$

整理后，$x+y-2z+1=0$ 为所求.

例 3.1.4 把平面 π 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程，求原点指向平面 π 的单位法向量及其方向余弦，并求原点到平面 π 的距离.

解 法式化因子为

$$\lambda=-\frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

于是法式方程为

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0.$$

从而

$$\vec{n}^0=\left(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7}\right),$$

所以方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{3}{7},\quad \cos\beta=\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=-\frac{6}{7},$$

原点到平面 π 的距离 $p=2$.

习 题 3.1

1. 求下列平面的坐标式参数方程与一般方程：

(1) 通过 $P_1(3,1,-1)$，$P_2(1,-1,0)$ 且平行于向量 $(-1,0,2)$；

(2) 通过 $P_1(1,-5,1)$，$P_2(3,2,-2)$ 且垂直于 xOy 坐标面；

(3) 已知三点 $A(5,1,3)$，$B(1,6,2)$，$C(5,0,4)$，所求平面通过 A，B，且与 $\triangle ABC$ 所在平面垂直.

2. 化平面方程 $x+2y-z+4=0$ 为截距式与参数式方程.

3. 设 π：$Ax+By+Cz+D=0$，$\vec{v}=(m,n,p)$，证明：

$$\vec{v}\,/\!/\,\pi \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

4. 设 $A(3,10,-5)$，$B(0,12,a)$，π：$7x+4y-z-1=0$. 已知 $AB/\!/\pi$，求 a.

5. 化平面的一般方程为法式方程：

(1) $x-2y+5z-3=0$；　　(2) $x-y+1=0$；

(3) $x+2=0$；　　(4) $4x-4y+7z=0$.

6. 求自原点引平面 $2x+3y+6z-35=0$ 的垂线段之长与指向平面的单位法向量与方向余弦.

3.2　平面与点、平面与平面的相关位置

空间中点与平面的关系只有点在平面上与点不在平面上两种情况，点在平面上的条件是点的坐标满足平面的方程. 点不在平面上时，由于平面有两个侧，要判断点位于哪侧是这一节的任务.

1. 点到平面的距离

定义 3.2.1　点 P_0 到平面 π 上的所有点的距离的最小者称为 P_0 点到平面 π 的距离，记作 $d(P_0,\pi)$.

$$\text{ie:}\ d(P_0,\pi)=\min\{d(P_0,P):P\in\pi\}.$$

显然，过 P_0 点作平面 π 的垂线，垂足为 P_0'，则 P_0 点到平面 π 的距离为 $|\overrightarrow{P_0P_0'}|$. 如图 3-2-1 所示，实因 $\forall Q\in\pi$，

$$|\overrightarrow{P_0Q}|\geqslant|\overrightarrow{P_0P_0'}|.$$

定理 3.2.1　点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

证　如图 3-2-2 所示，$\forall Q\in\pi$，

$$d=|\overrightarrow{QR}|=|\text{射影}_{\vec{n}^0}\overrightarrow{QP_0}|=|\overrightarrow{QP_0}\cdot\vec{n}^0|,$$

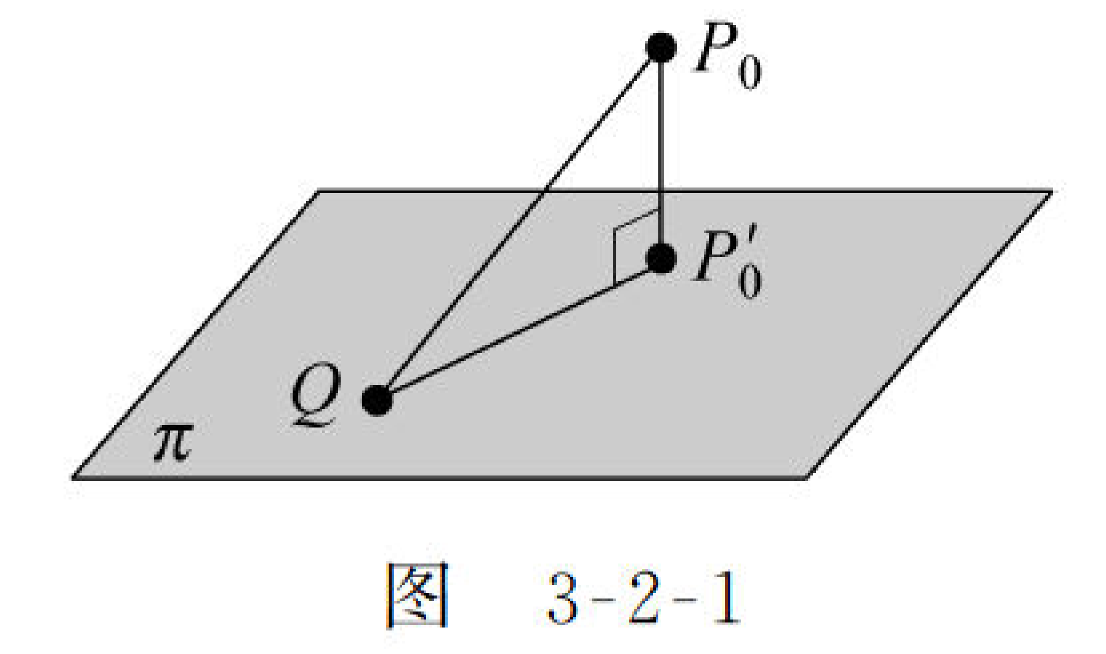


图　3-2-1

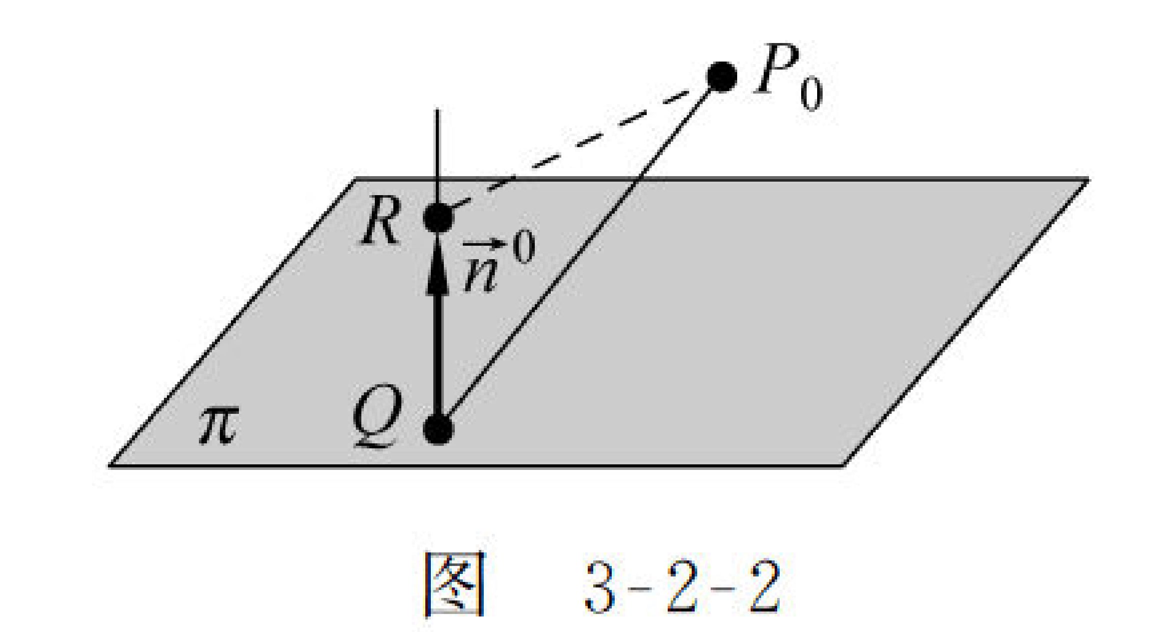


图　3-2-2

设 $Q(x_1,y_1,z_1)$，因为

$$\overrightarrow{QP_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1),$$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

而

$$\vec{n}^0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

所以

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. 平面的侧

平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 把空间分为两个部分，每个部分都称为**侧**. 如果平面 π 不是铅垂面，则把平面 π 的两个侧称为**上侧**与**下侧**. 当然，亦有左侧与右侧或前侧与后侧等.

对于不在平面上的点，其在哪个部分呢？

以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 与平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 为例.

当 $C\neq0$ 时，如果

$$z=-\frac{D+Ax_0+By_0}{C}>z_0,$$

则点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的下侧.

实因：点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在过点 $(x_0,y_0,0)$ 且垂直于坐标面 xOy 的直线 L 上，而直线 L 与平面 π 的交点是

$$Q_0\left(x_0,y_0,-\frac{D+Ax_0+By_0}{C}\right),$$

由 $-\frac{D+Ax_0+By_0}{C}>z_0$ 知点 P_0 在点 Q_0 的下方，所以点 P_0 在平面 π 的下侧.

由于$-\dfrac{D+Ax_0+By_0}{C}>z_0 \Leftrightarrow C(D+Ax_0+By_0+Cz_0)<0$,所以有下面的结论.

定理 3.2.2 设有点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$与平面 π:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

当 $C\neq 0$ 时,

点 P_0 在平面 π 的上(下)侧

$$\Leftrightarrow C(D+Ax_0+By_0+Cz_0)>0(<0).$$

当 $A\neq 0$ 时,

点 P_0 在平面 π 的前(后)侧

$$\Leftrightarrow A(D+Ax_0+By_0+Cz_0)>0(<0).$$

当 $B\neq 0$ 时,

点 P_0 在平面 π 的右(左)侧

$$\Leftrightarrow A(D+Ax_0+By_0+Cz_0)>0(<0).$$

例 3.2.1 求由平面

$$\pi_1: 2x-y+2z-3=0, \quad \pi_2: 3x+2y-6z-1=0,$$

所构成的二面角的角平分面的方程,在此二面角内有点

$$M(1,2,-3).$$

解 设角平分面上的动点为 $P(x,y,z)$,则

$$\frac{|2x-y+2z-3|}{3}=\frac{|3x+2y-6z-1|}{7},$$

于是角平分面有两个,即

$$23x-y-4z-24=0, \quad 5x-13y+32z-18=0.$$

因为

$$2(2\times 1-1\times 2+2(-3)-3)$$
$$=-18<0,$$

所以点 M 在平面 π_1 的下侧. 又

$$-6(3\times 1+2\times 2-6(-3)-1)<0,$$

所以点 M 在平面 π_2 的下侧,如图 3-2-3 所示.

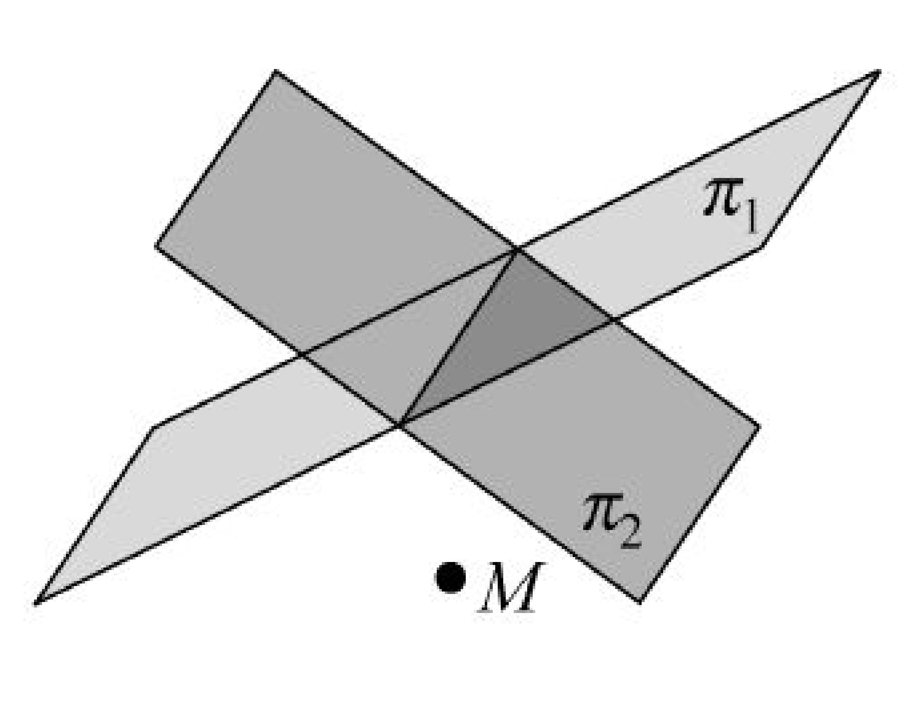


图 3-2-3

在平面 $5x-13y+32z-18=0$ 上任取不在平面 π_1 与 π_2 上的一点,如 $R_0\left(\frac{18}{5},0,0\right)$,因为

$$2\left(2\times\frac{18}{5}-1\times 0+2\times 0-3\right)=\frac{42}{5}>0,$$

$$-6\left(3\times\frac{18}{5}+2\times 0-6\times 0-1\right)<0,$$

所以平面 $5x-13y+32z-18=0$ 不满足题设条件,舍去.

在平面 $23x-y-4z-24=0$ 上任取不在平面 π_1 与 π_2 上的一点,如 $Q_0(0,0,-6)$,因为

$$2(2\times 0-1\times 0+2(-6)-3)=-30<0,$$

$$-6(3\times 0+2\times 0-6(-6)-1)=-210<0,$$

由于 Q_0 在 π_1 与 π_2 的同侧. 所以平面

$$23x-y-4z-24=0$$

为所求.

3. 两平面的相关位置

空间两平面的相关位置有三种,即相交、平行与重合.

定理 3.2.3 设两平面的方程为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则

$$\pi_1 \text{ 与 } \pi_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2;$$

$$\pi_1 \text{ 与 } \pi_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2};$$

$$\pi_1 \text{ 与 } \pi_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

证 由方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的解即知结论成立.

在直角坐标系下,由于两平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2),$$

所以,

π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 不平行;

π_1 与 π_2 平行或重合 $\Leftrightarrow\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$;

$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

而两平面 π_1 与 π_2 的夹角

$$\angle(\pi_1,\pi_2)=\pi-\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2).$$

(参见图 3-2-4)

又 $\cos\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$,

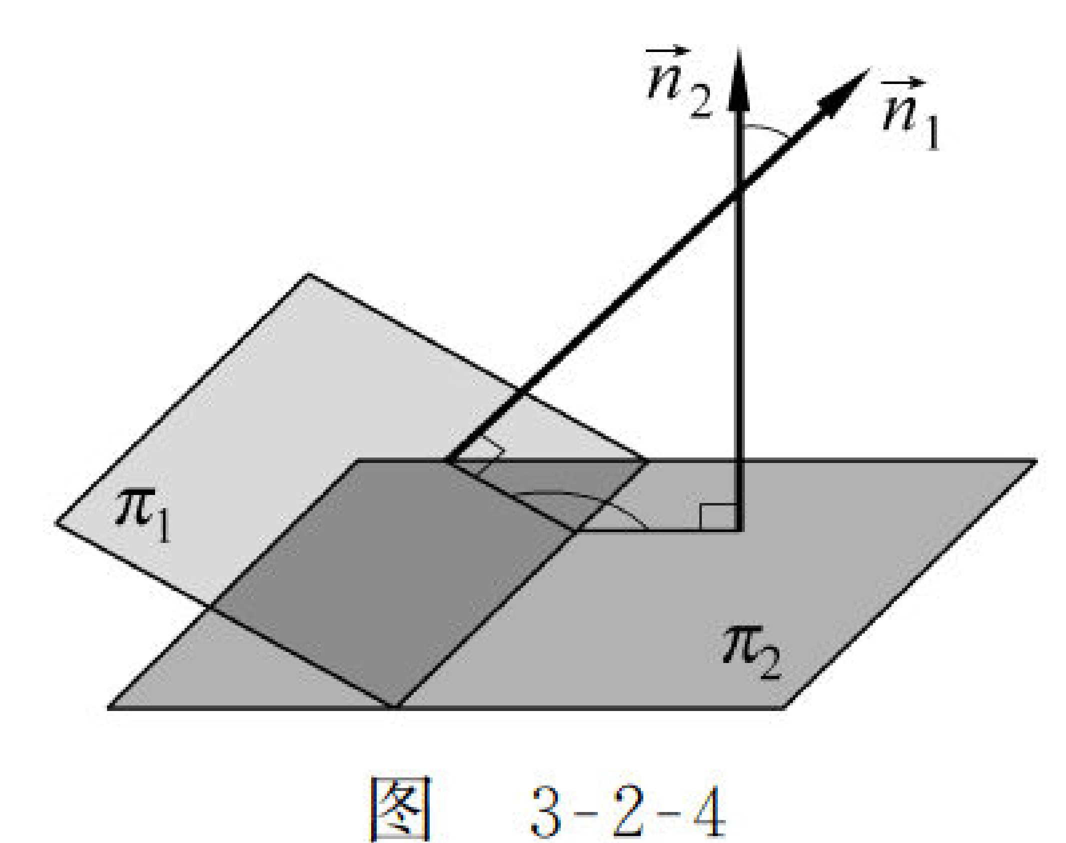


图 3-2-4

所以

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

例 3.2.2 求两平面

$$\pi_1:19x-4y+8z+21=0,\quad \pi_2:19x-4y+8z+42=0$$

的距离.

解 因为两平面的法式因子均为

$$\lambda=-\sqrt{19^2+4^2+8^2}=-21,$$

所以两平面的距离为 $d=\dfrac{42-21}{21}=1.$

注 如果法式因子不同号,则两平面的距离取加号.

例 3.2.3 求两平面 $\pi_1:x+y-11=0$ 与 $\pi_2:3x+8=0$ 所成的角.

解 因为 $\vec{n}_1=(1,1,0)$,$\vec{n}_2=(3,0,0)$,所以

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\pm\frac{3}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故两平面的夹角为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

例 3.2.4 设三个平行平面

$$\pi_k: Ax+By+Cz+D_k=0,\quad k=1,2,3,$$

点 L,P,Q 依次在 π_1,π_2,π_3 上，求三角形$\triangle LPQ$ 的重心的轨迹方程.

解 设 $L(x_1,y_1,z_1),P(x_2,y_2,z_2),Q(x_3,y_3,z_3)$，则

$$Ax_k+By_k+Cz_k+D_k=0,\quad k=1,2,3,$$

设三角形$\triangle LPQ$ 的重心为 $G(x,y,z)$，则

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3},$$

于是 $Ax+By+Cz+\frac{D_1+D_2+D_3}{3}=0$ 为所求.

习 题 3.2

1. 求下列平面的一般方程：

(1) 通过点 $P_1(2,-1,1)$和 $P_2(3,-2,1)$且分别平行于三个坐标面的三个平面；

(2) 通过点 $P(3,2,-4)$且在 x 轴和 y 轴上截距为 -2 和 3 的平面；

(3) 与平面 $5x+y-2z+3=0$ 垂直且分别通过三条坐标轴的三个平面；

(4) 已知两点 $P_1(3,-1,2)$和 $P_2(4,-2,-1)$，通过 P_1 且垂直于 P_1P_2 的平面；

(5) 原点 O 在所求平面的正投影为 $P(2,9,-6)$；

(6) 过点 $P_1(3,-5,1)$和 $P_2(4,1,2)$且垂直于

$$x-8y+3z-1=0$$

的平面.

2. 判别点 $P(2,-1,1)$，$Q(1,2,-3)$位于下列两相交平面所分

空间的哪个部分:

(1) $\pi_1: 3x-y+2z-3=0$ 与 $\pi_2: x-2y-z+4=0$;

(2) $\pi_1: 2x-y+5z-1=0$ 与 $\pi_2: 3x-2y+6z-1=0$.

3. 判别下列各对平面的相关位置:

(1) $x+2y-4z+1=0$ 与 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}-z-3=0$;

(2) $2x-y-2z-5=0$ 与 $x+3y-z-1=0$;

(3) $6x+2y-4z+3=0$ 与 $9x+3y-6z-\frac{9}{2}=0$.

4. 求下列各对平面所成的角:

(1) $x+y-11=0$ 与 $3x+8=0$;

(2) $2x-3y+6z-12=0$ 与 $x+2y+2z-7=0$.

5. 求过 z 轴且与平面

$$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$$

成 $60°$角的平面.

3.3 空间直线的方程

1. 直线的点向式方程

利用结论"过直线外一点可以确定而且只能确定一条直线与已知直线平行",我们用向量来讨论,从而建立空间直线的方程.

定义 3.3.1 过空间一点 P_0 能唯一确定一条直线 l 与已知非零向量 $\vec{v}$ 平行,向量 $\vec{v}$ 称为直线 l 的**方向向量**.

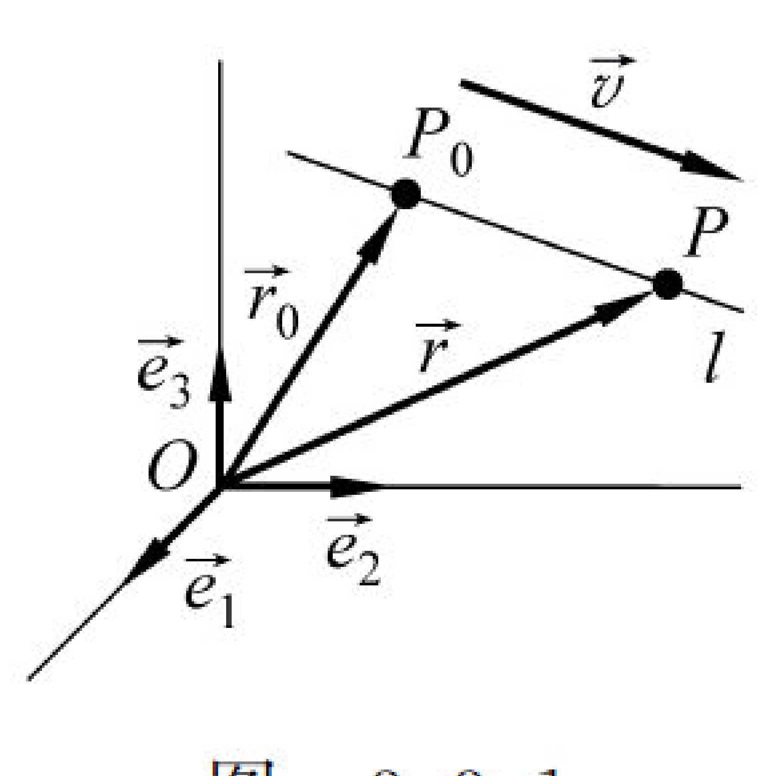


图 3-3-1

如图 3-3-1 所示,取仿射标架

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\},$$

取直线 l 经过 P_0 点且与 $\vec{v}$ 平行,在直线 l 上任取一点 P,则$\overrightarrow{P_0P}/\!/\vec{v}$,于是记

$$\overrightarrow{OP_0}=\vec{r}_0,\quad \overrightarrow{OP}=\vec{r},$$

则有 $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{v}$，即 $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}$. 这就是直线 l 的**向量式参数方程**.

设 $P(x,y,z)$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{v}=(m,n,p)$，则有

$$\begin{cases}x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt\end{cases},$$

这就是直线 l 的**坐标式参数方程**.

消去参数 t 得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

此式称为直线 l 的**对称式方程**或**标准方程**.

应该指出，任意平行于直线 l 的非零向量都是直线 l 的方向向量，所以直线 l 的任意两个方向向量的坐标成比例. 方向向量 $\vec{v}=(m,n,p)$ 的三个数 m,n,p 称为直线 l **方向数**.

在直角坐标系下，直线的方向向量常取单位向量

$$\vec{v}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为方向向量 $\vec{v}^0$ 的方向余弦. 这时直线 l 的参数方程为 $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}^0$ 或

$$\begin{cases}x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma.\end{cases}$$

标准方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

这时参数 t 的绝对值 $|t|$ 就是 P_0 到动点 P 距离，即 $|\overrightarrow{P_0P}|=|t|$. 实因

$$|\overrightarrow{P_0P}|=|\vec{r}-\vec{r}_0|=|t|.$$

直线 l 的方向向量的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为直线 l 的**方向余弦**，直线 l 的方向向量的方向角 α,β,γ 称为直线 l 的**方向角**，方向数与方向余弦的关系为

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

或

$$\cos\alpha = -\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta = -\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$
$$\cos\gamma = -\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

例 3.3.1 求通过两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程.

解 取 $\vec{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,设所求直线上的动点为 $P(x,y,z)$,$\vec{r}=\overrightarrow{OP}$,$\vec{r}_1=\overrightarrow{OP_1}$,$\vec{r}_2=\overrightarrow{OP_2}$,则所求直线的参数方程为

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{v}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1).$$

所求直线的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \quad t\in(-\infty,+\infty). \\ z=z_1+(z_2-z_1)t, \end{cases}$$

所求直线的标准方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

以上方程均称为**两点式方程**.

2. 直线的一般方程

如果空间两平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

相交,则其交线是一条直线. 而相交的条件是:

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零. 由此得到下面的定义.

定义 3.3.2 如果空间直线 l 上的点的坐标满足线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

又满足方程组的三元有序数组 (x,y,z) 所对应的点在直线 l 上，则称方程组为直线 l 的**一般方程**.

因为平面 π_1,π_2 的法向量为

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2),$$

而平面 π_1,π_2 相交所得的直线 L 的方向向量 $\vec{v}$ 满足

$$\vec{v}\perp\vec{n}_1 \quad 且 \quad \vec{v}\perp\vec{n}_2,$$

所以 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2\neq\vec{0}$ 时，两平面 π_1,π_2 相交，且交线 l 的方向向量为 $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$，即

$$\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

如果点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在直线 l 上，则直线 l 的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

例 3.3.2 把直线 l 的一般方程

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x-2y-z=0 \end{cases}$$

化为标准方程.

解 因为 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,-2,3)\times(1,-2,-1)=(8,4,0)$，所以直线 l 的方向向量取 $\vec{v}=(2,1,0)$. 又令 $y=0$ 得 $x=1$，$z=1$，即点 $(1,0,1)$ 在直线 l 上，故 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 为所求.

3. 直线的射影式方程

定义 3.3.3 如果空间直线 l 的一般方程是两张平行于坐标轴

的平面方程构成的方程组，则此方程组称为直线 l 的**射影式方程**.

如图 3-3-2 所示，在直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下，直线 l 在 xOy 平面上的射影为

$$l_1:\begin{cases}ax+by+c=0,\\ z=0.\end{cases}$$

在 yOz 平面上的射影为

$$l_2:\begin{cases}dy+ez+f=0,\\ x=0.\end{cases}$$

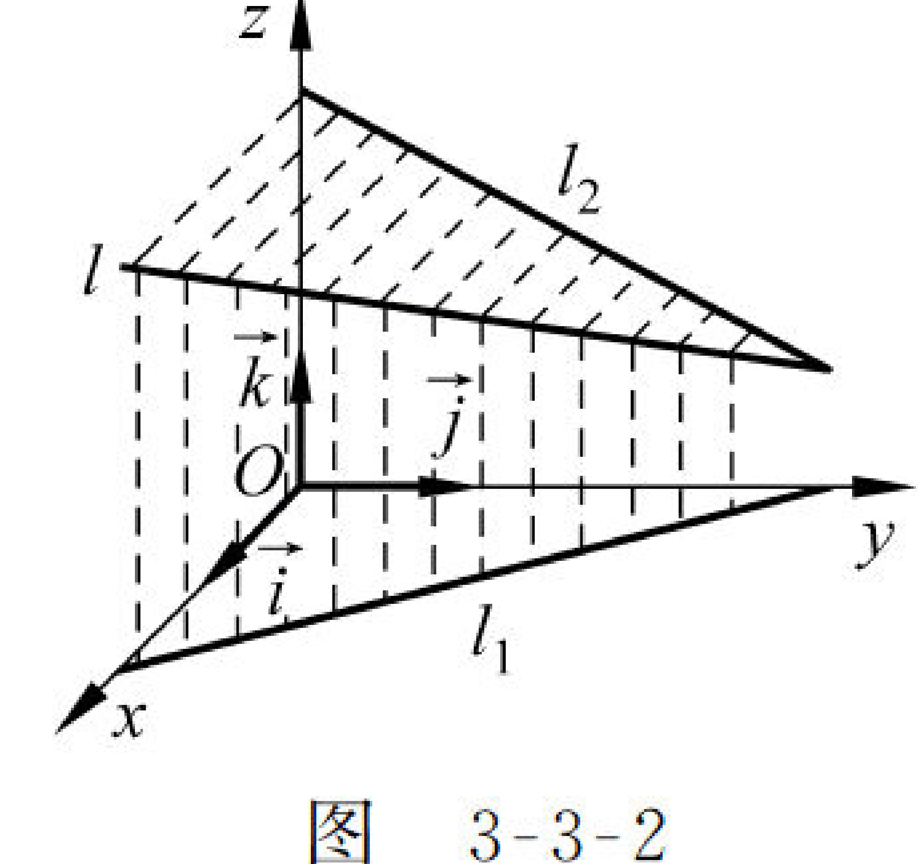


图 3-3-2

则线性方程组

$$\begin{cases}ax+by+c=0,\\ dy+ez+f=0\end{cases}$$

为直线 l 的射影式方程.

显然直线的射影式方程是一种特殊的一般方程，即第一个方程不含 z（对应的平面垂直于 xOy 平面），第二个方程不含 x（对应的平面垂直于 yOz 平面）. 就直线

$$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$ 不全为零，所以由两个方程经消元可获得一个至少含有一个变元的方程，如

$$F(x,y)=0 \quad 或 \quad F(x,z)=0 \quad 或 \quad F(y,z)=0.$$

再将 $F(x,y)=0$ 与方程组中的一个方程消去 x 得 $G(y,z)=0$（或消去 y 而得 $G(x,z)=0$），从而获得直线 l 的射影式方程

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ G(y,z)=0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}F(x,y)=0,\\ G(x,z)=0.\end{cases}$$

当然消元得根据题设条件去消.

例 3.3.3 把直线 l 的一般方程

$$\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\ x-2y-z=0\end{cases}$$

化为射影式方程以及标准方程.

解 两方程相减得 $y-4z+4=0$,代入第二个方程得

$$x-5z+4=0,$$

所以方程组

$$\begin{cases} y-4z+4=0, \\ x-5z+4=0 \end{cases}$$

为直线 l 的射影式方程.

又因为

$$\frac{x+4}{5}=z, \quad \frac{y+4}{4}=z,$$

所以直线 l 的标准方程为

$$\frac{x+4}{5}=\frac{y+4}{4}=\frac{z}{1}.$$

习 题 3.3

1. 求下列各直线的方程:

(1) 通过点 $P_1(-3,0,1)$和 $P_2(2,-5,1)$的直线;

(2) 通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$且平行于两相交平面

$$\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad i=1,2$$

的直线;

(3) 通过点 $P_0(1,-5,3)$且与 x,y,z 三轴成角 $60°,45°,120°$的直线;

(4) 通过点 $P_0(1,0,-2)$且与两直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1} \quad 和 \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$$

垂直的直线;

(5) 通过点 $P_0(2,-3,-5)$且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线.

2. 求下列各点的坐标:

(1) 在直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-8}{3}$上与原点相距 25 个单位的点;

(2) 关于直线$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$与点 $P(2,0,-1)$对称的点.

3. 求下列各平面的方程：

(1) 通过点 $P_0(2,0,-1)$与过直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$的平面；

(2) 通过直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+1}{-1}$且与直线$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$平行的平面；

(3) 通过直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-1}$且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面；

(4) 通过直线$\begin{cases} 5x+8y-3z+9=0, \\ 2x-4y+z-1=0 \end{cases}$向三个坐标面所引的三个射影平面.

4. 化下列直线的一般方程为射影方程与标准方程，并求出直线的方向余弦：

(1) $\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ 2x-y+2z-3=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+z-6=0, \\ 2x-4y-z+6=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x=2. \end{cases}$

5. 一直线与三条坐标轴间的夹角分别为 α,β,γ，证明：

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2.$$

3.4 直线与平面、直线与点的相关位置

1. 直线与平面的相关位置

空间直线 l 与平面 π 的相关位置有：

(1) 相交；(2) 平行；(3) 直线在平面上.

今给出直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l:\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}\qquad \pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

为求出直线 l 与平面 π 的交点,由代入法得

$$-(Am+Bn+Cp)t=Ax_0+By_0+Cz_0+D.$$

由有唯一解、无解与有无穷多个解得下面的定理.

定理 3.4.1 空间直线 l 与平面 π 的相关位置的条件为:

(1) 相交 $\Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq 0$;

(2) 平行 $\Leftrightarrow \begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0;\end{cases}$

(3) 直线在平面上 $\Leftrightarrow \begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.\end{cases}$

在直角坐标系下,因为直线 l 的方向向量为 $\vec{v}=(m,n,p)$,平面 π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,又点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在直线 l 上,所以 l 平行于平面 π 的判别为

$$l\ /\!/\ \pi \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{n}\quad 且\quad P_0(x_0,y_0,z_0)\notin\pi.$$

由初等几何知,当直线 l 与平面 π 斜交时,其交角 φ 是指直线 l 与其在平面 π 上的射影所构成的锐角(参见图 3-4-1).

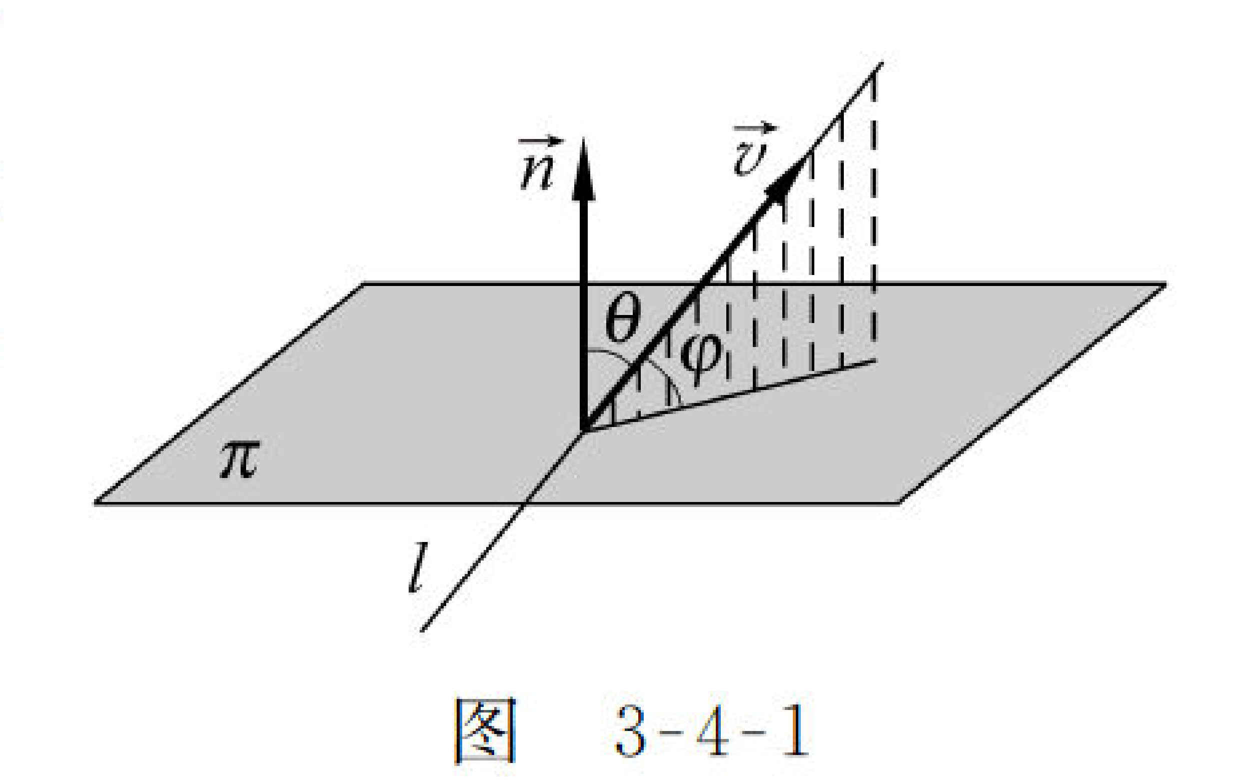


图 3-4-1

当 $l\perp\pi$ 时,$\varphi=\frac{\pi}{2}$. 设

$$\angle(\vec{v},\vec{n})=\theta,$$

则 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$,因而

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

这就是直线 l 与平面 π 的**夹角公式**.

由前面的讨论可得下面的结论.

定理 3.4.2　空间直线 l 与平面 π 平行或直线 l 在平面 π 上 $\Leftrightarrow$

$$Am+Bn+Cp=0,$$

而 $l\perp\pi\Leftrightarrow\vec{v}\,/\!/\,\vec{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

例 3.4.1　验证直线 l：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面

$$\pi: 2x+y-z-3=0$$

相交,并求出它们的交点与交角.

解　因为 $\vec{v}\cdot\vec{n}=2(-1)+1+(-1)2=-3\neq0$,所以直线 l 与平面 π 相交.

变直线 l 的方程为

$$\begin{cases}x=-t,\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases},$$

代入平面 π 的方程得 $t=-1$,所以直线 l 与平面 π 的交点为 $P_0(1,0,-1)$. 又

$$\sin\varphi=\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 为所求.

2. 直线与点的相关位置

直线 l 与点 P_0 的相关位置有两种,即点 P_0 在直线 l 上或点 P_0 在直线 l 外,而点 P_0 在直线 l 上的充分必要条件是点 P_0 的坐标满足直线 l 的方程. 当点 P_0 不在直线 l 上时,我们关注的是点 P_0 到直线 l 的距离.

定义 3.4.1　点 P_0 与直线 l 上的点的距离的最小者称为点 P_0 到直线 l 的距离,记作 $d(P_0,l)$.

$$\text{ie}:\ d(P_0,l)=\min\{d(P_0,P):P\in l\}.$$

显然,与点到平面的距离一样,过 P_0 点作直线 l 的垂面与直线 l 相交而得垂足 P_0',因为直线 l 上其他点到 P_0 点的距离不会小于 P_0 到垂足 P_0' 的距离,所以 $d(P_0,l)=d(P_0,P_0')=|\overrightarrow{P_0P_0'}|$.

在直角坐标系下,如图 3-4-2 所示,给一定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$与直线

$$l:\begin{cases}x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt,\\ z=z_1+pt.\end{cases}$$

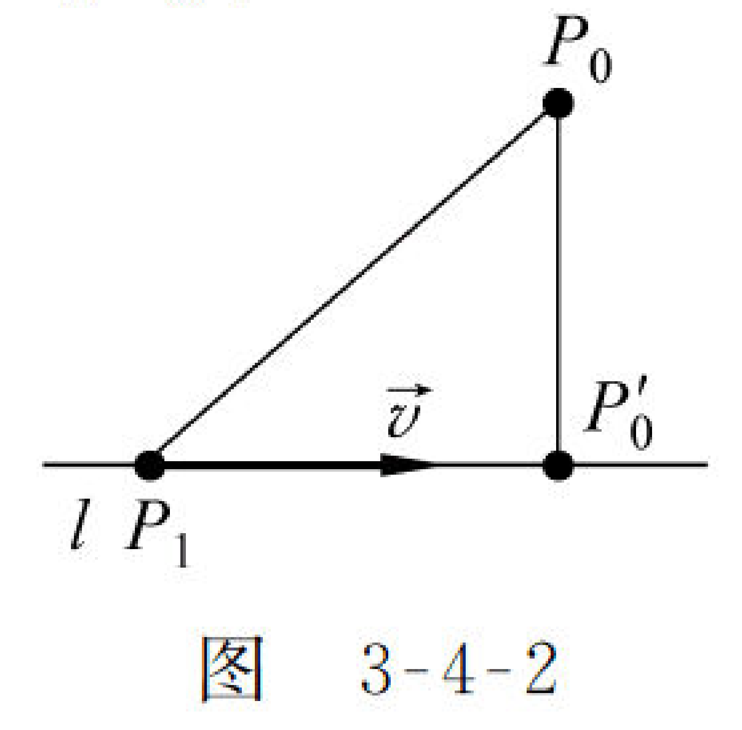


图　3-4-2

由于点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$在直线 l 上,又直线 l 的方向向量 $\vec{v}=(m,n,p)$,于是

$$\text{射影}_{\vec{v}}\ \overrightarrow{P_1P_0}=\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}}{|\vec{v}|}.$$

所以由勾股定理知,P_0 到直线 l 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_0}|^2-\frac{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_0})^2}{|\vec{v}|^2}}.$$

例 3.4.2　求点 $P_0(2,3,-1)$到直线

$$l:\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\ 3x-2y+2z+17=0\end{cases}$$

的距离.

解　化直线 l 的方程为标准方程

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+6}{1}=\frac{z+13}{-2}.$$

则 $P_1(-1,-6,-13)$在直线 l 上,直线 l 的方向向量 $\vec{v}=(2,1,-2)$.于是

$$\overrightarrow{P_1P_0}=(3,9,12),\ |\overrightarrow{P_1P_0}|^2=234,$$
$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}=6+9-24=-9,\ |\vec{v}|=3,$$

所以 $d=\sqrt{234-9}=15$ 为所求.

习 题 3.4

1. 判别下列直线与平面的相关位置：

(1) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{2}$与 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$与 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0,\\2x-y-z-1=0\end{cases}$与 $4x-3y+7z-7=0$；

(4) $\begin{cases}x=t,\\y=-2t+9,\\z=9t-4\end{cases}$与 $3x-4y+7z-10=0$.

2. 确定 m,n 的值使：

(1) 直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$与平面 $mx+3y-5z+1=0$ 平行；

(2) 直线$\begin{cases}x=2t+2,\\y=-4t-5,\\z=3t-1\end{cases}$与平面 $mx+ny+6z-7=0$ 垂直.

3. 判定直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$与平面

$$(A_1+A_2)x+(B_1+B_2)y+(C_1+C_2)z=0$$

的相关位置.

4. 求点 $P(2,3,-1)$到直线$\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$的距离.

3.5 空间两直线的相关位置

1. 空间两直线的相关位置

空间两直线相关位置有共面与异面，共面时又有相交、平行、重合等.

设两直线的方程为

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

则点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$在 l_1 上,点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$在 l_2 上,于是两直线的相关位置取决于三向量 $\vec{v}_1=(m_1,n_1,p_1)$,$\vec{v}_2=(m_2,n_2,p_2)$与$\overrightarrow{P_1P_2}$的相互关系,这就是下面的定理.

定理 3.5.1 两直线 l_1 与 l_2 的相关位置有:

(1) 异面$\Leftrightarrow(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\overrightarrow{P_1P_2})\neq 0$;

(2) 相交$\Leftrightarrow\begin{cases}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\overrightarrow{P_1P_2})=0,\\ m_1:n_1:p_1\neq m_2:n_2:p_2;\end{cases}$

(3) 平行$\Leftrightarrow m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2 \neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$;

(4) 重合$\Leftrightarrow m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2 =(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$.

2. 空间两直线的夹角

定义 3.5.1 两直线 l_1,l_2 的方向向量 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 的夹角称为两直线 l_1,l_2 的夹角,记作$\angle(l_1,l_2)$,即

$$\angle(l_1,l_2)=\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2) \quad 或 \quad \angle(l_1,l_2)=\pi-\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2).$$

由定义 3.5.1 与前面的讨论,可得下面的结论.

定理 3.5.2 在直角坐标系下,两直线 l_1,l_2 的夹角的余弦为

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\pm\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

推论 在直角坐标系下

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

3. 两直线的距离与公垂线的方程

定义 3.5.2 分别在两直线 l_1,l_2 上的点之间的距离的最小者称为两直线 l_1 与 l_2 的距离，记作 $d(l_1,l_2)$.

$$\text{ie}: d(l_1,l_2)=\min\{d(P_1,P_2): P_1\in l_1, P_2\in l_2\}.$$

定义 3.5.3 与两条异面直线都垂直且相交的直线称为这两条异面直线的**公垂线**，两个交点的距离称为**公垂线的长**.

定理 3.5.3 两条异面直线的距离等于公垂线的长.

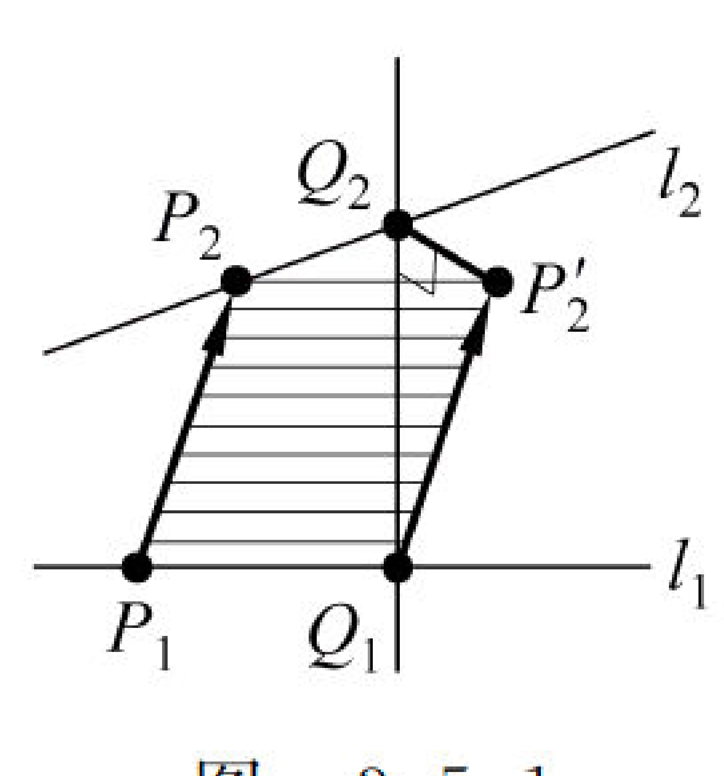


图 3-5-1

证 如图 3-5-1 所示，设两条异面直线 l_1，l_2 与公垂的交点为 Q_1,Q_2，则 $\forall P_1\in l_1$，$\forall P_2\in l_2$，平移 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 让 P_1 与 Q_1 重合，于是

$$|\overrightarrow{Q_1Q_2}|=|\text{射影}_{\overrightarrow{Q_1Q_2}}\overrightarrow{P_1P_2}\leqslant|\overrightarrow{P_1P_2}|.$$

故结论成立.

定理 3.5.4 设两条异面直线的方程为

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

则直线 l_1,l_2 的距离 $d(l_1,l_2)=\dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}$. 其中点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在 l_1 上，点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 在 l_2 上，

$$\vec{v}_1=(m_1,n_1,p_1),\quad \vec{v}_2=(m_2,n_2,p_2).$$

证 如图 3-5-2 所示，因为以 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\overrightarrow{P_1P_2}$ 为邻边的平行六面体的体积

$$V=|(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)|,$$

而底面的平行四边形的面积 $S=|(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)|$，故直线 l_1,l_2 的距离

$$d(l_1,l_2)=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}.$$

现求两条异面直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

的公垂线的方程.

设公垂线为 l_0,则 l_0 可视为由 l_0 与 l_1 所确定的平面 π_1 和由 l_0 与 l_2 所确定的平面 π_2 的交线(参见图 3-5-3). 而点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$在 l_1 上,点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$在 l_2 上. 又直线 l_0 的方向向量

$$\vec{v}_0=(m,n,p)=\vec{v}_1\times\vec{v}_2,$$

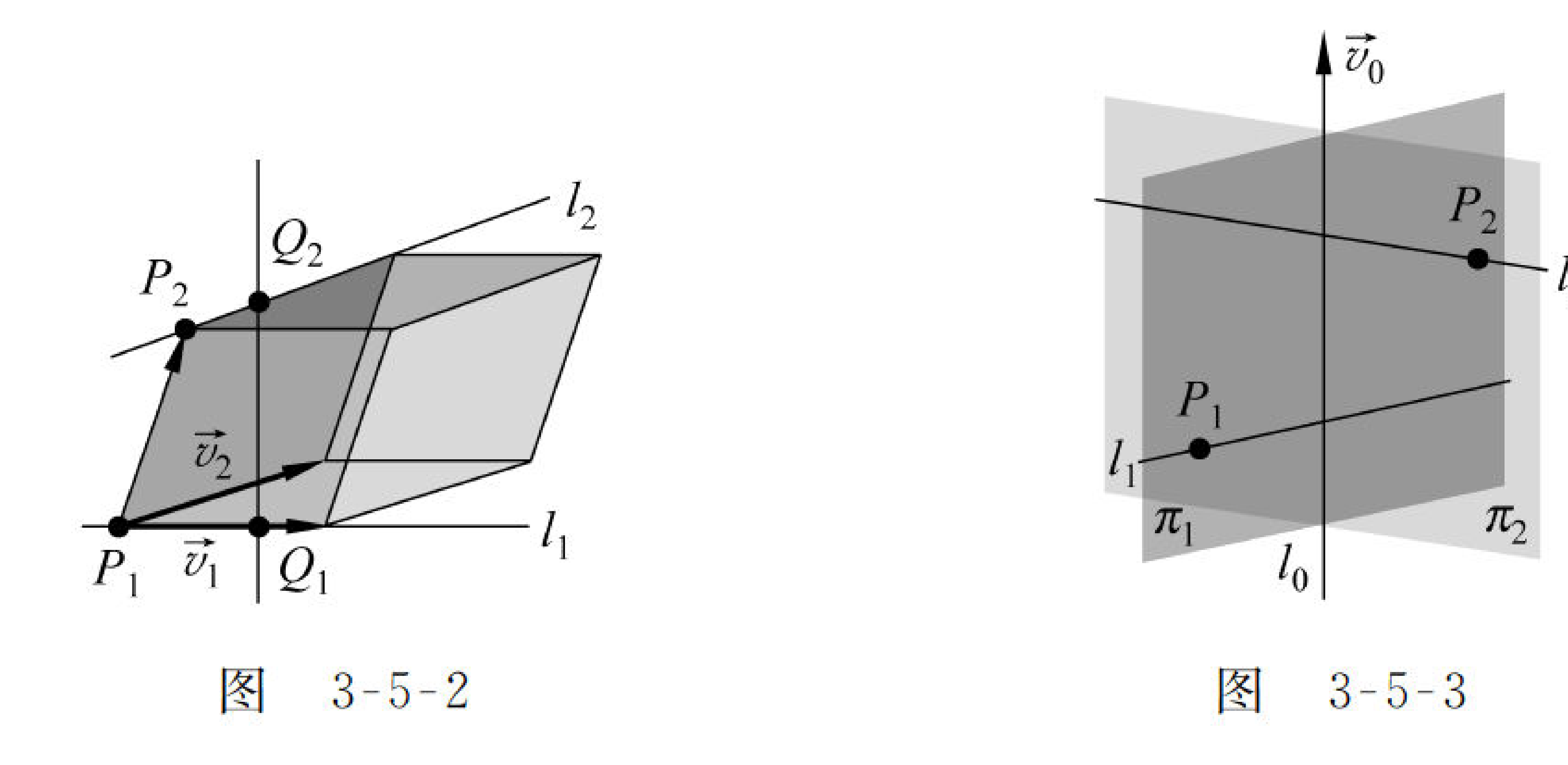


图 3-5-2　　　　图 3-5-3

从而由点向式得到平面 π_1 与平面 π_2 的方程,联立方程组就是公垂线的方程,即

$$l_0:\begin{cases}\begin{vmatrix}x-x_1 & x-x_1 & x-x_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m & n & p\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}x-x_2 & x-x_2 & x-x_2\\ m_2 & n_2 & p_2\\ m & n & p\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

其中 $m=\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix}p_1 & m_1\\ p_2 & m_2\end{vmatrix}$, $p=\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}$.

例 3.5.1 求通过点 $P_0(1,1,1)$ 与两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},\quad l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线方程.

解 设所求直线的方向向量 $\vec{v}=(m,n,p)$，已知 $\vec{v}_1=(1,2,3)$，$\vec{v}_2=(2,1,4)$，且 l_1 经过点 $P_1(0,0,0)$，l_2 经过点 $P_2(1,2,3)$，从而由所求直线与直线 l_1 相交得

$$(\overrightarrow{P_0P_1},\vec{v}_1,\vec{v})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ m & n & p\end{vmatrix}=0,$$

即 $m-2n+p=0$. 由所求直线与直线 l_2 相交得

$$(\overrightarrow{P_0P_2},\vec{v}_2,\vec{v})=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ m & n & p\end{vmatrix}=0,$$

即 $m+2n=p=0$. 由联立方程组 $\begin{cases}m-2n+p=0,\\ m+2n-p=0\end{cases}$ 得

$$m:n:p=0:2:4=0:1:2,$$

从而直线 $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 为所求.

例 3.5.2 已知两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\quad l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}.$$

证明其为异面直线，并求其距离与公垂线的方程.

解 因为

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以两直线为异面直线.

设公垂线为 l_0，因为公垂线的方向向量

$$\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0,0,2),$$

所以两直线的距离 $d=\dfrac{(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}=\dfrac{4}{2}=2.$

再 l_1 经过点 $P_1(0,0,-1)$，l_2 经过点 $P_2(1,1,1)$，所以由 l_1 与公垂线 l_0 确定的平面的方程为

$$\begin{vmatrix}x & y & z+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,$$

即 $x+y=0$. 由 l_2 与公垂线 l_0 确定的平面的方程为

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0,$$

即 $x-y=0$. 所以公垂线 l_0 的方程为 $\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=0\end{cases}$ 也可以表为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$$

即 z 轴.

习　题　3.5

1. 确定 λ 的值使得下列两直线相交：

(1) $\begin{cases}3x-y+2z-6=0,\\ x+4y+\lambda z-15=0\end{cases}$ 与 z 轴；

(2) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$.

2. 判别下列各对直线的相关位置，如果是相交的或平行的，求出它们所在的平面；如果是异面直线，求出它们之间的距离：

(1) $\begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x+2y-z-11=0, \\ 3x+z-14=0; \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与 $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$;

(3) $\begin{cases} x=t, \\ y=2t-1, \\ z=-t-2 \end{cases}$ 与 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-7}{7}=\dfrac{z+2}{-5}$.

3. 求两异面直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 与 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 的公垂线方程.

4. 求下列各对直线的角：

(1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ 与 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$;

(2) $\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$

5. 求过点 $P(2,1,0)$ 且与直线

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$$

垂直且相交的直线.

3.6 平 面 束

为了寻求经过直线 l 且满足某种属性 Q 的平面，我们只需在经过直线 l 的所有平面构成的集合中寻找具有属性 Q 的直线即可. 同样，为了寻求平行于平面 π 且满足某种属性 Q 的平面，我们也只需在平行于平面 π 的所有平面中寻找具有属性 Q 的平面即可. 这就是我们为什么要给出平面束的原因.

1. 平面束的概念

空间中经过一条直线的平面有无数多个，平行于某一平面的平

面也有无数多个,所以有下面的定义.

定义 3.6.1 空间中所有经过直线 l 的平面构成的集合称为**有轴平面束**,l 称为**平面束的轴**.

定义 3.6.2 空间中所有与平面 π 平行的平面称为**平面$\boldsymbol{\pi}$ 的平行平面束**.

有轴平面束与平行平面束都是无穷集合.对于有轴平面束中的平面,我们可以给出一个含参数的三元一次方程来表示.对于平行平面束,也有同样的结论.

定理 3.6.1 如果两个平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

交于直线 l,则以 l 为轴的平面束方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 λ,μ 不全为零.

证 因为平面 π_1 与 π_2 相交,所以 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 与 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 线性无关,从而 λ,μ 不全为零,故方程

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

是三元一次方程,且其表示的平面经过直线 l.

反过来,$\forall P_0(x_0, y_0, z_0) \notin l$,取

$$\lambda = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2,$$
$$\mu = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1),$$

则经过直线 l 且经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的平面方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

综上可知结论成立.

在定理 3.6.1 中,给出了求经过直线 l 且具有属性 Q:过直线 l 外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的平面的方法,即由属性 Q 来确定平面束中的参数即可.值得注意的是,成比例的 λ,μ 所确定的平面相同,即 $\lambda_1 : \mu_1 = \lambda_2 : \mu_2$,则平面

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

与平面

$$\lambda_2(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

是同一个平面.

定理 3.6.2 由平面 π:$Ax+By+Cz+D=0$ 决定的平面束方程为

$$Ax+By+Cz+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

证 因为 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,平面 $Ax+By+Cz+\lambda=0$ 与平面 π 平行,所以平面 $Ax+By+Cz+\lambda=0$ 是平面 π 的平面束中的平面.

又任意与平面 π 平行的平面都可以表为

$$Ax+By+Cz+\lambda=0,$$

所以结论成立.

2. 平面束的应用

例 3.6.1 求经过直线

$$l:\begin{cases}2x+y-2z+1=0,\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$$

且与平面 π:$x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面的方程为

$$\lambda(2x+y-2z+1)+\mu(x+2y-z-2)=0,$$

则由垂直性得 $(2\lambda+\mu)+(2\lambda+\mu)+(-2\lambda-\mu)=0$,即 $\lambda+2\mu=0$,取 $\lambda=2,\mu=-1$,则 $3x-3z+4=0$ 为所求.

例 3.6.2 求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 z 轴上的截距为 -2 的平面方程.

解 设所求平面方程为 $3x+y-z+\lambda=0$,由题设条件知所求平面经过点 $P_0(0,0,-2)$,所以 $\lambda=-2$,故 $3x+y-z-2=0$ 为所求.

例 3.6.3 设

$$l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.\end{cases}$$

证明：l_1,l_2 共面$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0$.

证 因为经过直线 l_1 的平面方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

经过直线 l_2 的平面方程为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0,$$

其中 λ_1,λ_2 不全为零,λ_3,λ_4 不全为零,所以

l_1,l_2 共面$\Leftrightarrow\exists\lambda_1,\lambda_2$ 与 λ_3,λ_4,使得上面两个平面方程是同一个平面. 即 $\exists m$,使得

$$\begin{aligned}&\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\\ \equiv\, &m(\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)).\end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned}&(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2-m\lambda_3A_3-m\lambda_4A_4)x\\ +&(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2-m\lambda_3B_3-m\lambda_4B_4)y\\ +&(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2-m\lambda_3C_3-m\lambda_4C_4)z\\ +&(\lambda_1D_1+\lambda_2D_2-m\lambda_3D_3-m\lambda_4D_4)\equiv 0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}\lambda_1A_1+\lambda_2A_2-m\lambda_3A_3-m\lambda_4A_4=0,\\ \lambda_1B_1+\lambda_2B_2-m\lambda_3B_3-m\lambda_4B_4=0,\\ \lambda_1C_1+\lambda_2C_2-m\lambda_3C_3-m\lambda_4C_4=0,\\ \lambda_1D_1+\lambda_2D_2-m\lambda_3D_3-m\lambda_4D_4=0.\end{cases}$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不全为零,所以

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

习　题　3.6

1. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 与 $x+5y-z+2=0$ 的交线且满足下面条件之一的平面：

(1) 通过原点；

(2) 与 y 平行；

(3) 与平面 $2x-y+5z-3=0$ 垂直.

2. 求通过直线

$$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$$

且与平面 $x-4y+8z+12=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面.

第 4 章

常见的曲面

前面我们讨论了平面与空间直线，这一章我们将讨论的是常见的曲面，它们是柱面、锥面、旋转曲面以及二次曲面. 由于面是线运动的轨迹，所以我们在讨论这些曲面时，都是要找到运动的曲线与运动的方式，从而获得这些曲面的方程.

4.1 柱　　面

1. 柱面的方程

由一簇平行直线构成的曲面称为柱面，它的实质是由一条直线运动生成的曲面，所以我们有下面的定义.

定义 4.1.1 在空间中，平行于定方向 $\vec{v}$ 的直线 l 沿曲线 L 运动的轨迹称为柱面(参见图 4-1-1). 其中 $\vec{v}$ 称为**柱面的方向**，在柱面上平行于 $\vec{v}$ 的直线 l 称为**柱面的母线**，曲线 L 称为**柱面的准线**.

图　4-1-1

设柱面的准线方程为

$$L:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

柱面的定方向 $\vec{v}=(m,n,p)$，则

$$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in L,$$

过点 P_1 的母线方程为 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$. 令

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} = t,$$

则 $x_1=x-mt, y_1=y-nt, z_1=z-pt$, 由于 P_1 在准线 L 上, 所以

$$\begin{cases} F_1(x-mt, y-nt, z-pt) = 0, \\ F_2(x-mt, y-nt, z-pt) = 0. \end{cases}$$

就上述方程组, 消去参数 t, 得三元方程

$$F(x,y,z) = 0,$$

其就是我们所要求的柱面方程.

例 4.1.1 设柱面的准线方程为

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2, \end{cases}$$

母线的方向 $\vec{v}=(-1,0,1)$, 求此柱面的方程.

解 由恒等变形, 准线的方程为

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)\in L$, 那么过点 P_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{-1} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{1},$$

且 $\begin{cases} x_1^2+y_1^2=1, \\ z_1=0. \end{cases}$ 令 $\dfrac{x-x_1}{-1}=\dfrac{y-y_1}{0}=\dfrac{z-z_1}{1}=t$, 则

$$x_1 = x+t, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z-t,$$

代入准线方程得

$$\begin{cases} (x+t)^2 + y^2 = 1, \\ z = t. \end{cases}$$

消去参数 t 得 $(x+z)^2+y^2=1$, 故

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1 = 0$$

为所求.

例 4.1.2　已知圆柱面的轴为

$$l:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2},$$

点 $P_0(1,-2,1)$在此柱面上,求此圆柱面的方程.

解　方法一　由于母线的方向向量为 $\vec{v}=(1,-2,-2)$,所以过点 P_0 且垂直于 $\vec{v}$ 的平面为 $\pi:(x-1)-2(y+2)-2(z-1)=0$,即

$$\pi:x-2y-2z-3=0.$$

设轴与平面 π 的交点为 P_2,则圆柱的准线是以点 P_2 为圆心,点 P_0 在圆周上的圆.因为点 $P_1(0,1,-1)$在轴上,而

$$|\overrightarrow{P_0P_1}|=\sqrt{14},$$

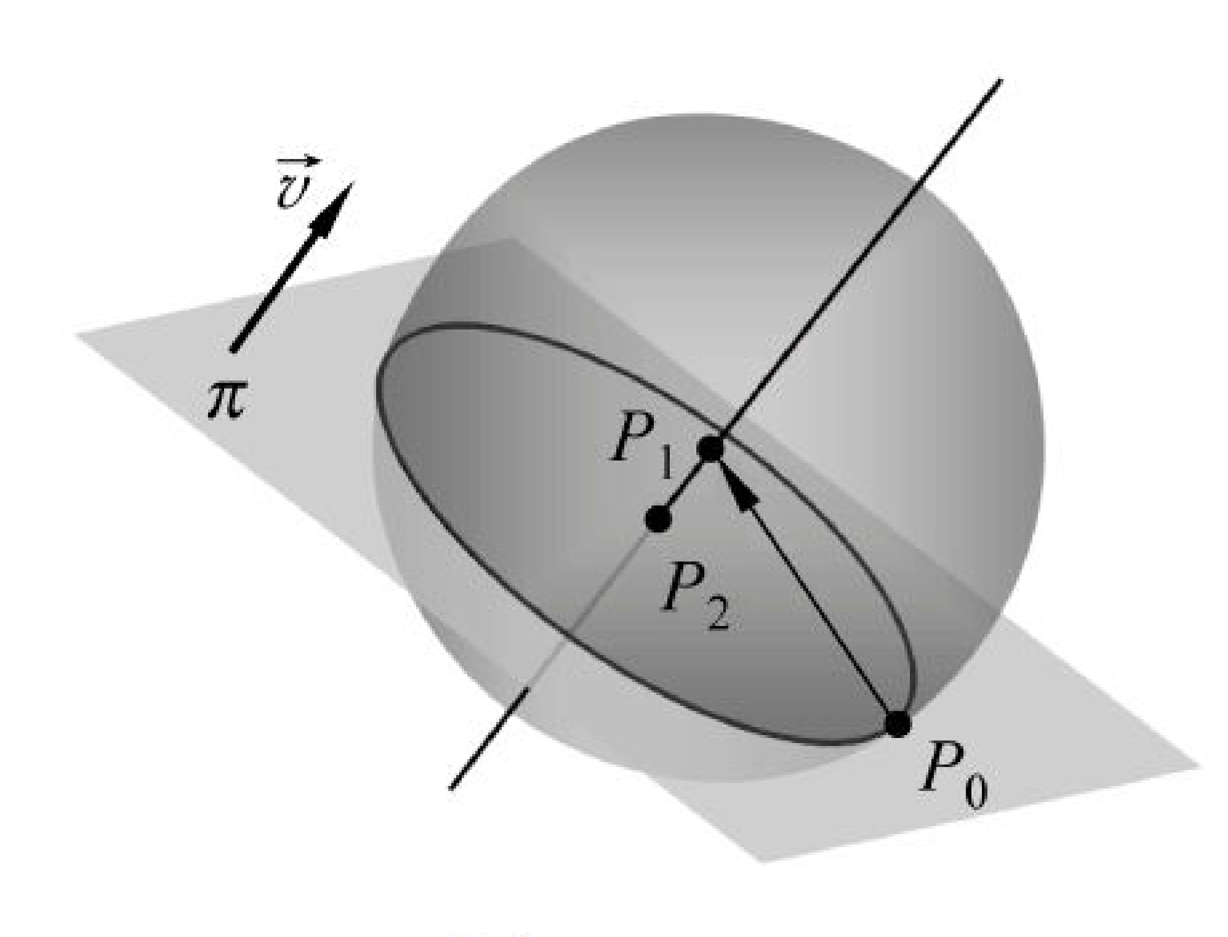


图　4-1-2

所以准线可视为球心为点 P_1,半径为$\sqrt{14}$的球面与平面 π 的交线(参见图 4-1-2).即准线

$$L:\begin{cases}x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14,\\x-2y-2z-3=0.\end{cases}$$

设点 $P_3(x_3,y_3,z_3)$为准线上的点,则

$$\begin{cases}x_3^2+(y_3-1)^2+(z_3+1)^2=14,\\x_3-2y_3-2z_3-3=0.\end{cases}$$

且过 P_3 的母线方程为

$$\frac{x-x_3}{1}=\frac{y-y_3}{-2}=\frac{z-z_3}{-2},$$

令$\frac{x-x_3}{1}=\frac{y-y_3}{-2}=\frac{z-z_3}{-2}=t$,得

$$x_3=x-t,\quad y_3=y+2t,\quad z_3=z+2t,$$

代入准线方程得

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y+2t-1)^2+(z+2t+1)^2=14,\\(x-t)-2(y+2t)-2(z+2t)-3=0.\end{cases}$$

消去参数 t 得

$$x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0,$$

此即所求.

方法二 母线的方向向量 $\vec{v}=(1,-2,-2)$，点 $P_1(0,1,-1)$ 在轴上，点 $P_0(1,-2,1)$ 在柱面上(参见图 4-1-3)，于是

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(-1,3,-2),$$

$$|\overrightarrow{P_0P_1}|=\sqrt{14}.$$

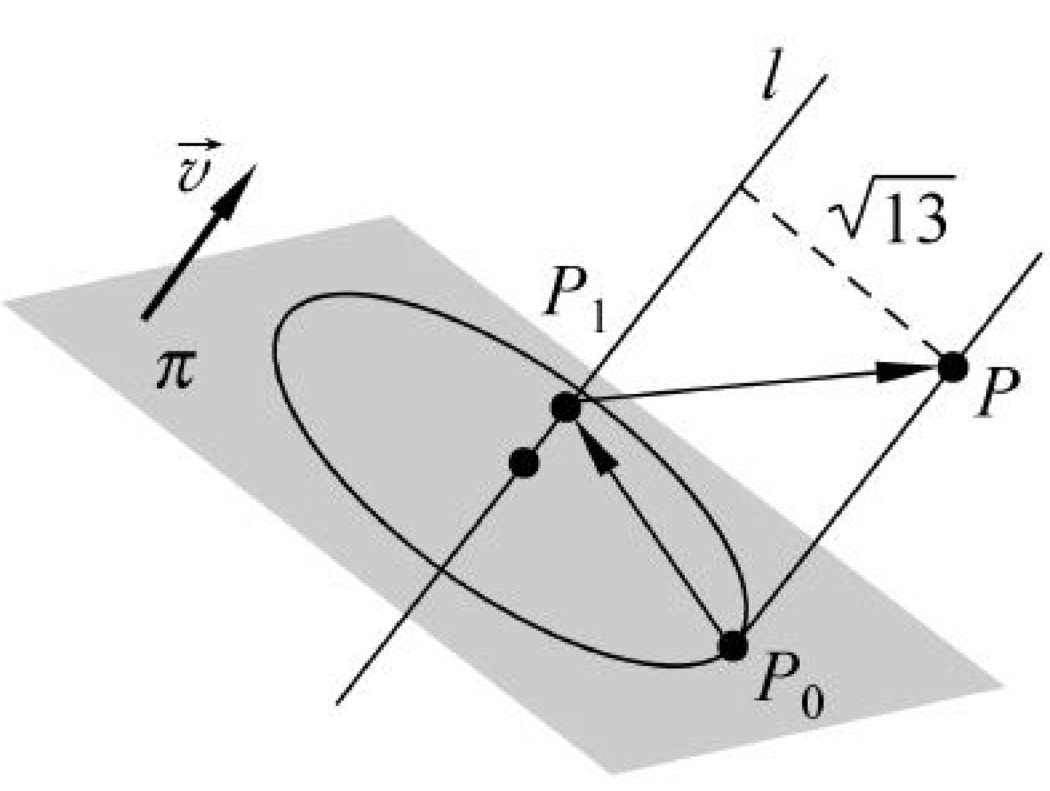


图 4-1-3

而

$$映射_{\vec{v}}\overrightarrow{P_0P_1}=\frac{(-1,3,-2)\cdot(1,-2,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{-1-6+4}{3}=-1,$$

所以 P_0 到轴的距离 $d=\sqrt{13}$. 设点 $P(x,y,z)$ 为柱面上的动点，则

$$d(P,l)=\sqrt{13}.$$

而 $\overrightarrow{P_1P}=(x,y-1,z+1)$ 且 $|\overrightarrow{P_1P}|=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$. 又

$$映射_{\vec{v}}\overrightarrow{P_1P}=\frac{(x,y-1,z+1)\cdot(1,-2,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{x-2y-2z}{3},$$

所以柱面方程为 $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2-\dfrac{(x-2y-2z)^2}{9}=13$，即

$$x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0,$$

此为所求.

对于母线平行于坐标轴的柱面，其方程有简单的构形，这就是下面的定理.

定理 4.1.1 柱面是母线平行于 x 轴(或 y 轴或 z 轴)$\Leftrightarrow$柱面的方程里只含有 y 和 z(或只含有 x,z 或只含有 x,y).

证 ($\Rightarrow$)设柱面是母线平行于 x 轴，则母线的方向向量

$$\vec{v}=(1,0,0).$$

设准线方程 $L:\begin{cases}F(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$ 取 $P_1(x_1,y_1,z_1)\in L$,则

$$\begin{cases}F(y_1,z_1)=0,\\x_1=0,\end{cases}$$

且过点 P_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{0},$$

即 $\begin{cases}y=y_1,\\z=z_1.\end{cases}$ 代入上式即得 $F(y,z)=0$,故结论成立.

($\Leftarrow$)设柱面的方程里只含 y,z,即 $F(y,z)=0$. 在柱面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则 $\forall x$,点 $P(x,y_0,z_0)$ 在柱面上. 所以过点 P_0,以 $\vec{v}=(1,0,0)$ 为方向向量的直线在柱面上. 由点 P_0 的任取性知柱面的母线的方向向量 $\vec{v}=(1,0,0)$,故结论成立.

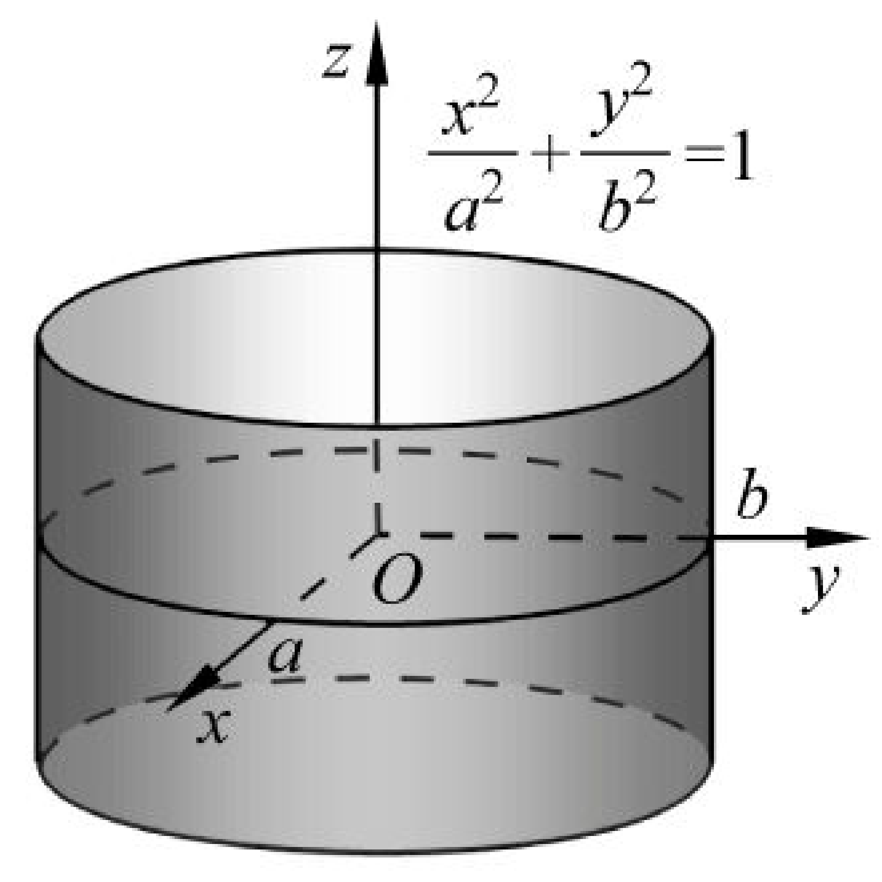


图 4-1-4

由定理 4.1.1 的给出,可得**椭圆柱面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(参见图 4-1-4);**双曲柱面** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(参见图 4-1-5);**抛物柱面** $y^2=2px$(参见图 4-1-6).

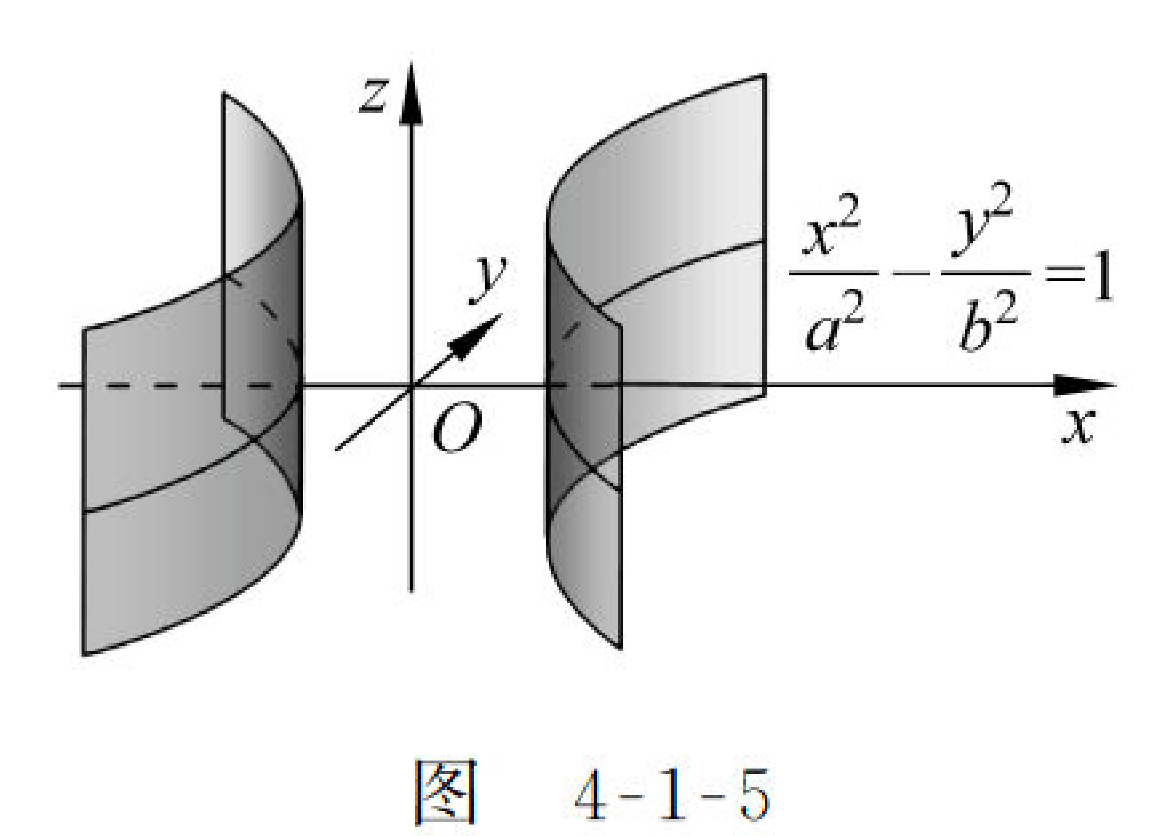


图 4-1-5

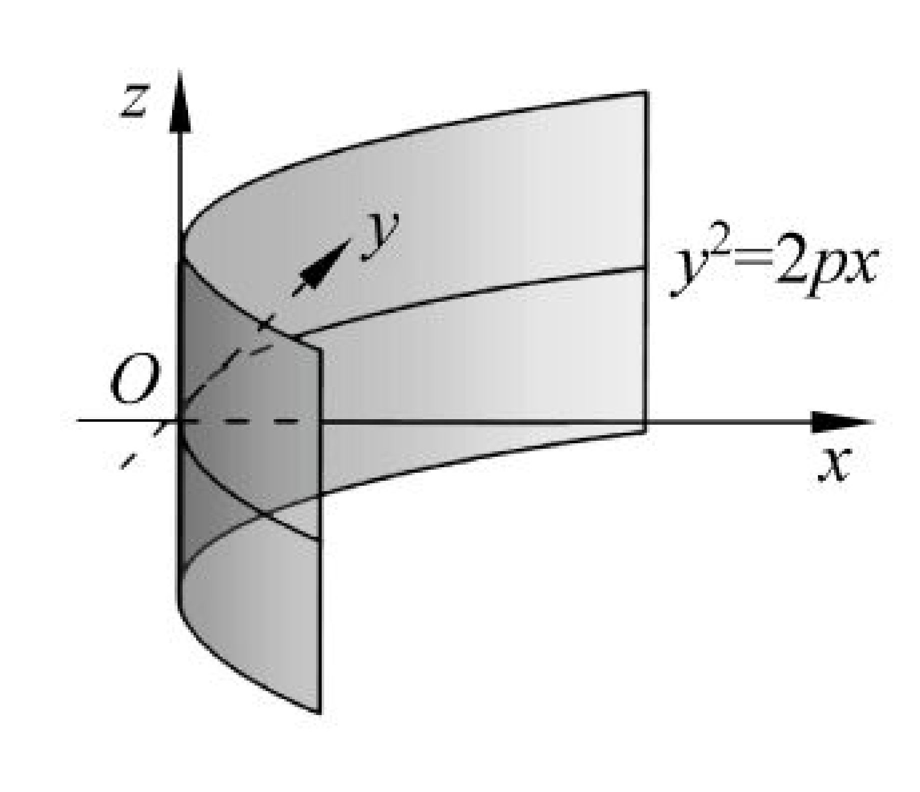


图 4-1-6

因为它们的方程是二次的,所以称为**二次曲面**.

2. 空间曲线的射影柱面

定义 4.1.2 设空间曲线为 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 消去一个变元得

$$F_1(x,y)=0 \quad 或 \quad F_2(y,z)=0 \quad 或 \quad F_3(x,z)=0,$$

则曲线 L 的方程可表为

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_2(y,z)=0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}F_2(y,z)=0,\\F_3(x,z)=0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_3(x,z)=0.\end{cases}$$

我们称柱面 $F_1(x,y)=0$ 为曲线 L 对 xOy **平面的射影柱面**;柱面 $F_2(y,z)=0$ 为曲线 L 对 yOz **平面的射影柱面**;柱面 $F_3(x,z)=0$ 为曲线 L 对 xOz **平面的射影柱面**. 而曲线

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\z=0;\end{cases} \quad \begin{cases}F_2(y,z)=0,\\x=0;\end{cases} \quad \begin{cases}F_3(x,z)=0,\\y=0\end{cases}$$

分别称为曲线 L 在三个坐标面上的**射影曲线**.

利用空间曲线的射影柱面来表达空间曲线,能让我们很好地认识空间曲线的构形. 而且可以一眼看出空间曲线在坐标面上的射影曲线.

例 4.1.3 设空间曲线的方程为

$$L:\begin{cases}2x^2+z^2+4y=4z,\\x^2+3z^2-8y=12z.\end{cases}$$

求曲线 L 在坐标面 xOy 和 xOz 上的射影曲线.

解 用加减消元法得 $x^2+4y=0$ 与 $x^2+z^2=4z$,所以曲线 L 在坐标面 xOy 和 xOz 上的射影曲线分别为

$$\begin{cases}x^2+4y=0,\\z=0;\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+z^2=4z,\\y=0.\end{cases}$$

利用射影柱面,曲线 L 可表为

$$L:\begin{cases}x^2+4y=0,\\x^2+z^2=4z,\end{cases}$$

其形如图 4-1-7 所示.

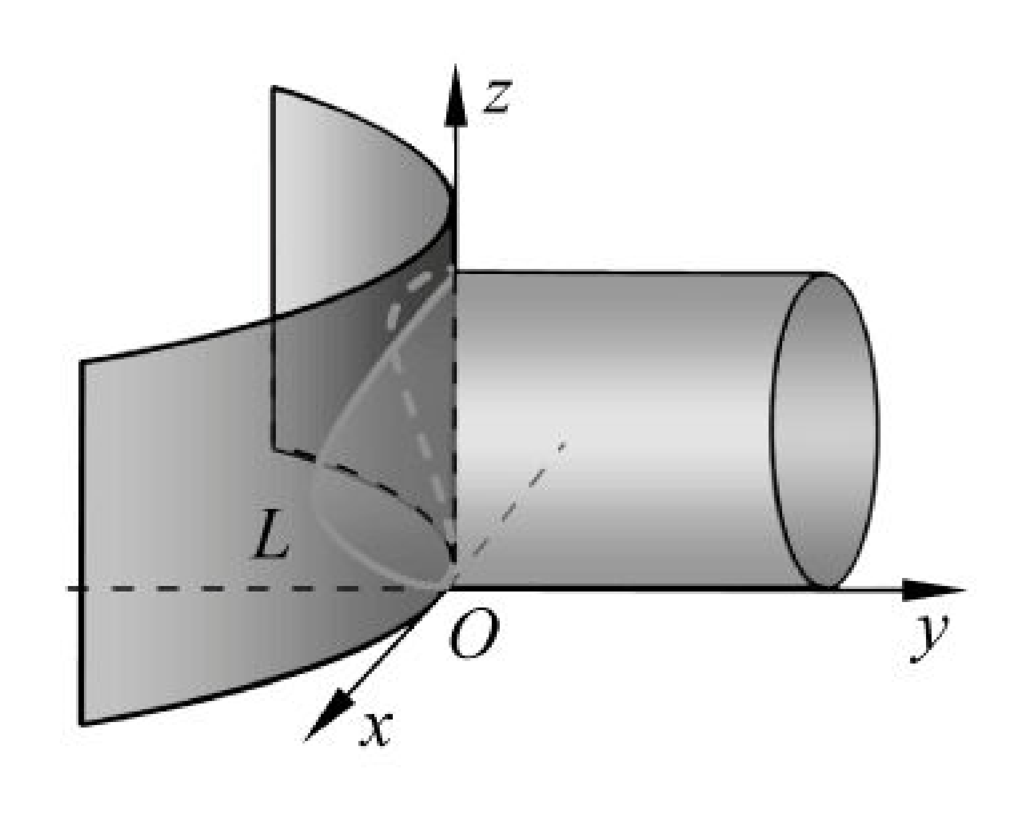


图 4-1-7

例 4.1.4 证明:曲面 $(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2$ 是柱面.

证 变形得 $(x-z)^2=a^2-(y+z-a)^2$,即

$$(x-z)^2=(y+z)(2a-y-z).$$

从而曲面方程可表为

$$\begin{cases}x-z=\lambda(y+z),\\ \lambda(x-z)=2a-y-z,\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}x-\lambda y-(1-\lambda)z=0,\\ \lambda x+y+(1-\lambda)z-2a=0.\end{cases}$$

这是一簇直线,都在所给曲面上,所以曲面是由直线生成.由于方向数之比

$$m:n:p=\begin{vmatrix}-\lambda & -(1+\lambda)\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-(1+\lambda) & 1\\ 1-\lambda & \lambda\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -\lambda\\ \lambda & 1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda^2+1):-(\lambda^2+1):(\lambda^2+1)$$
$$=1:-1:1,$$

所以生成曲面的直线皆平行,故所给曲面是柱面.

习 题 4.1

1. 设柱面的准线为 $\begin{cases}x=y^2+z^2,\\ x=2z,\end{cases}$ 母线垂直于准线所在的平面,求这柱面的方程.

2. 求过三条平行直线

$$x=y=z、x+1=y=z-1 \quad 与 \quad x-1=y+1=z-2$$

的圆柱面的方程.

3. 证明下列方程表示的曲面是柱面:

(1) $(x+y)(y+z)=x+2y+z$;

(2) $x^2+y^2+z^2+2xz-1=0$.

4. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $4x^2+9y^2=36$; (2) $x^2-2x+y=0$.

5. 求下列空间曲线对三个坐标面的射影柱面方程:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+6z=5, \\ 3x-2y-10z=7; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$

4.2 锥　　面

1. 锥面的方程

定义 4.2.1 在空间中,通过定点 P_0 的直线 l 沿曲线 L 运动的轨迹称为锥面(参见图 4-2-1).

定点 P_0 称为锥面的**顶点**,直线 l 称为锥面的**母线**,曲线 L 称为锥面的**准线**.

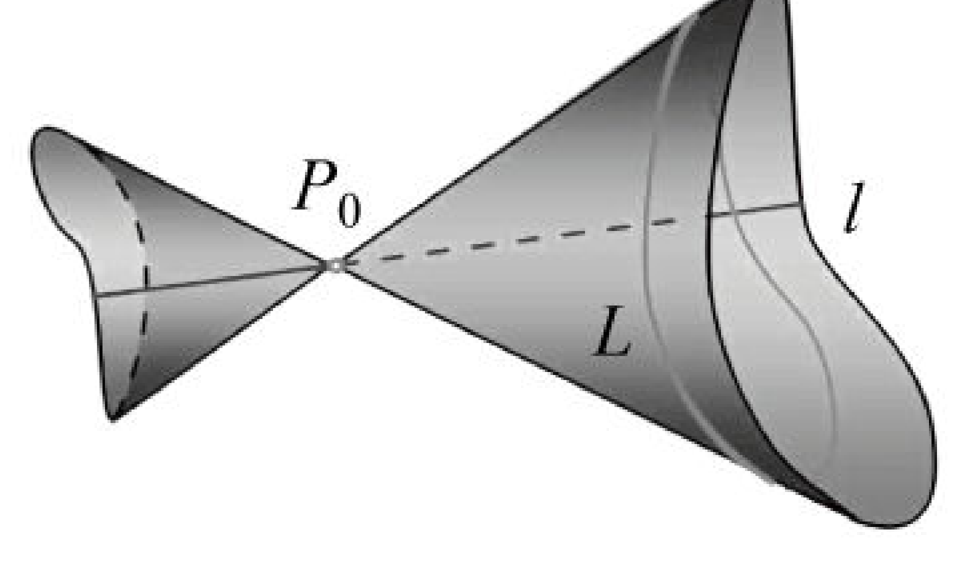


图 4-2-1

设锥面准线的方程为

$$L:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则 $\forall P_1(x_1,y_1,z_1)\in L$,过 P_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

令 $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}=t$,则

$$x_1=\frac{x-x_0+tx_0}{t},\quad y_1=\frac{y-y_0+ty_0}{t},$$

$$z_1=\frac{z-z_0+tz_0}{t},$$

因为 $P_1(x_1,y_1,z_1)\in L$,所以

$$\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0,\\F_2(x_1,y_1,z_1)=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}F_1\left(\dfrac{x-x_0+tx_0}{t},\dfrac{y-y_0+ty_0}{t},\dfrac{z-z_0+tz_0}{t}\right)=0,\\F_2\left(\dfrac{x-x_0+tx_0}{t},\dfrac{y-y_0+ty_0}{t},\dfrac{z-z_0+tz_0}{t}\right)=0.\end{cases}$$

两个方程消去参数 t 得 $F(x,y,z)=0$,这就是以点 P_0 为顶点,以曲线 L 为准线的锥面方程.

显然,锥面的准线不唯一,凡是与所有母线都相交的曲线都是该锥面的准线.

例 4.2.1 设锥面的顶点为原点,准线为

$$L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\z=c,\end{cases}$$

求此锥面的方程.

解 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上的点,那么过点 P_1 的母线方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},\quad 且\quad \begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\z_1=c.\end{cases}$$

从而 $x_1=\dfrac{cx}{z}$,$y_1=\dfrac{cy}{z}$,代入方程

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

得

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1,$$

即方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

为所求.这个锥面称为二次锥面(参见图 4-2-2).

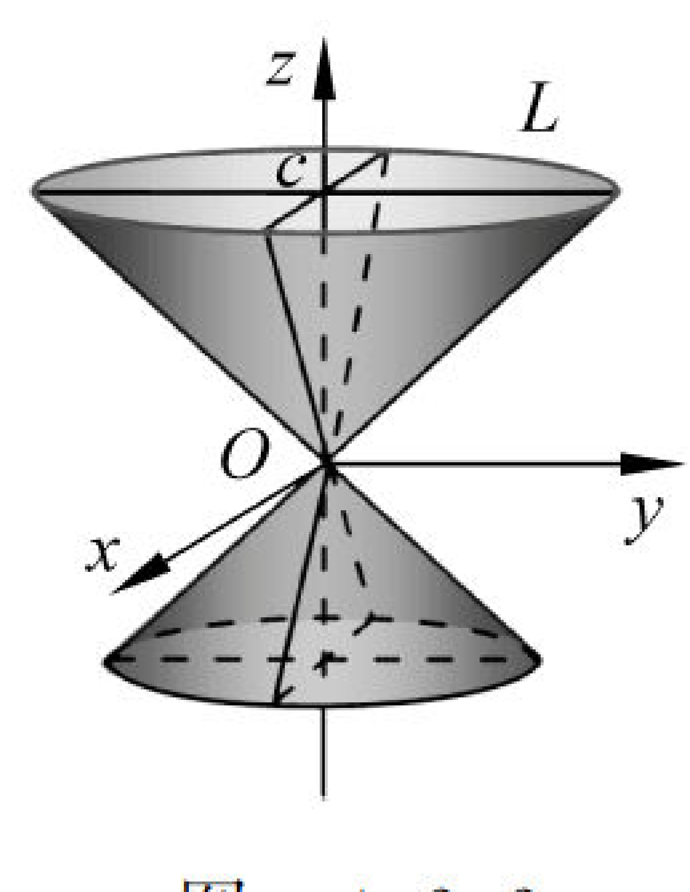


图 4-2-2

例 4.2.2 设锥面的顶点为原点,准线为

$$L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c,\end{cases}$$

求此锥面的方程.

解 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上的点,那么过点 P_1 的母线方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}\quad 且\quad \begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ z_1=c.\end{cases}$$

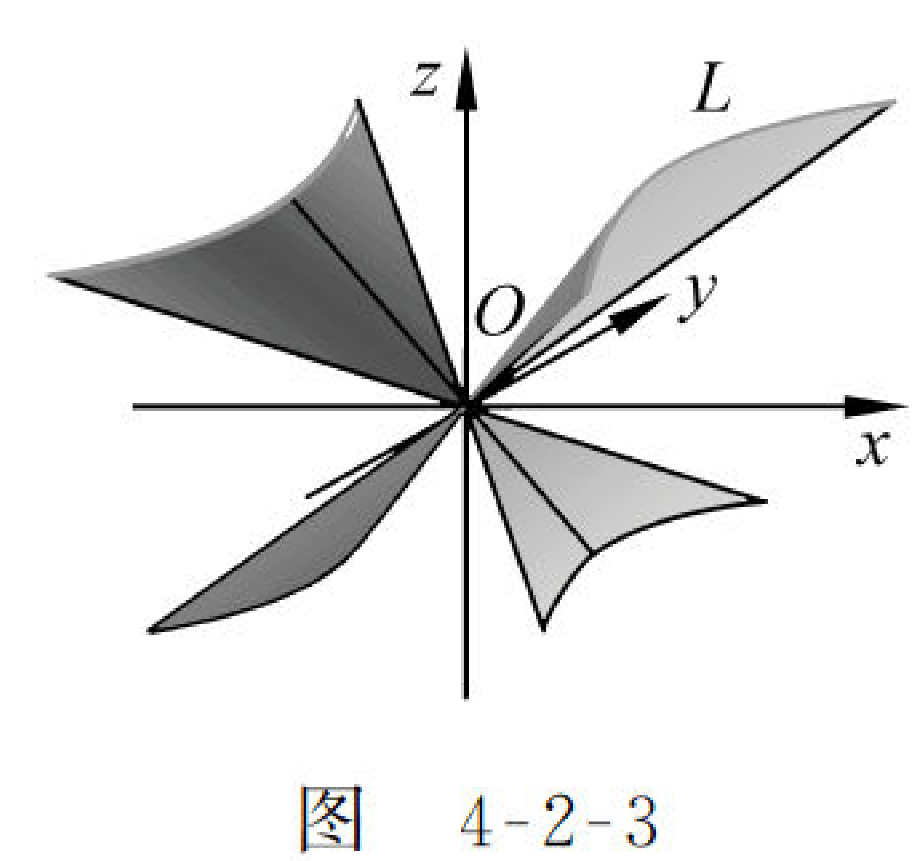


图 4-2-3

从而 $x_1=\dfrac{cx}{z},y_1=\dfrac{cy}{z}$,于是

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}-\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1,$$

即方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 为所求(参见图 4-2-3).

例 4.2.3 设锥面的顶点为原点,准线为

$$L:\begin{cases}y^2=2px,\\ z=c.\end{cases}$$

求此锥面的方程.

解 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上的点,那么过点 P_1 的母线方程为

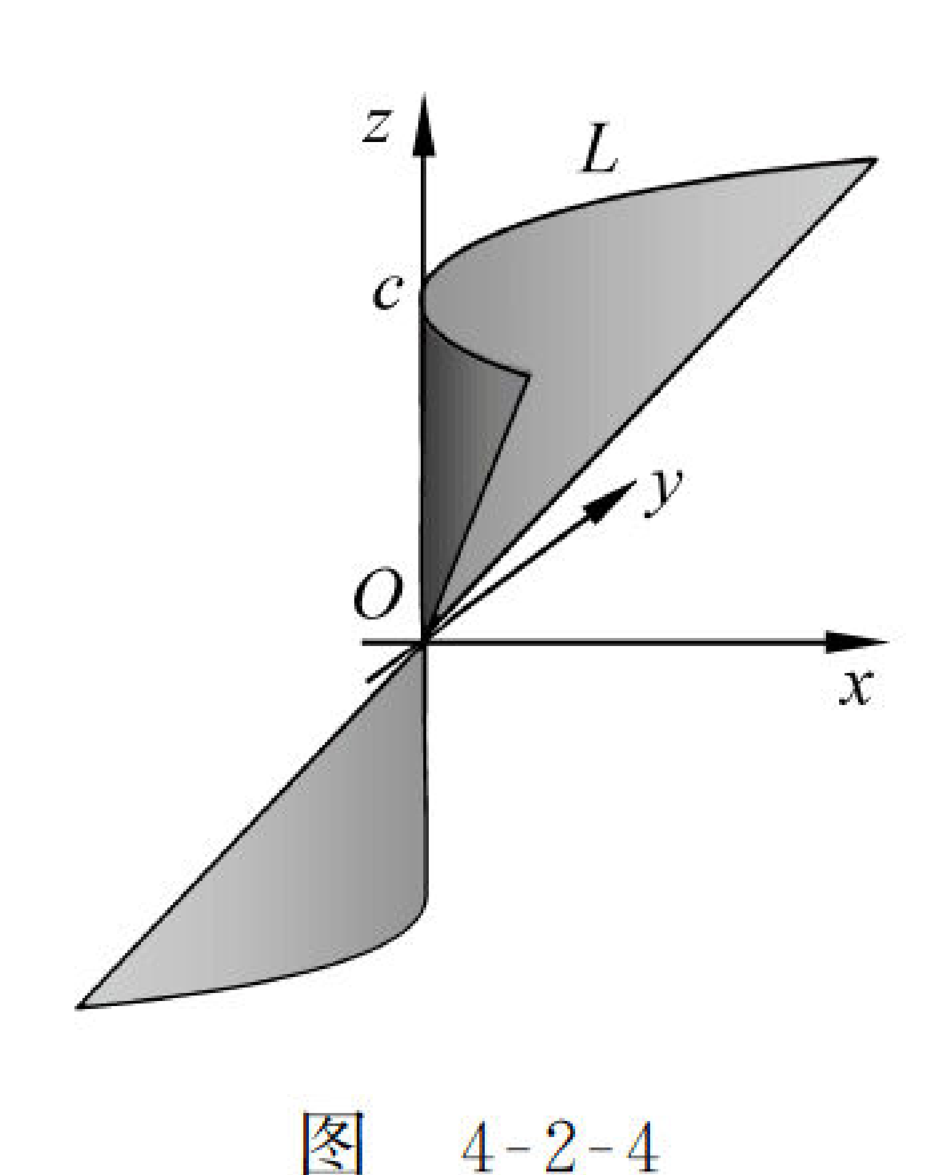


图 4-2-4

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}, \quad 且 \quad \begin{cases} y_1^2=2px_1, \\ z_1=c. \end{cases}$$

从而 $x_1=\frac{cx}{z}$，$y_1=\frac{cy}{z}$，于是

$$\left(\frac{cy}{z}\right)^2=2p\frac{cx}{z},$$

即方程 $y^2=\frac{2pxz}{c}$ 为所求（参见图 4-2-4）.

例 4.2.4 已知圆锥面的顶点为 $P_0(1,2,3)$，轴垂直于平面

$$\pi: 2x+2y-z+1=0,$$

母线与轴成 30°角，求此圆锥面的方程.

解 设母线上的点为 $P(x,y,z)$，则母线 P_0P 的方向向量

$$\vec{v}=(x-1,y-2,z-3),$$

而轴的方向向量是平面 π 的法向量 $\vec{n}=(2,2,-1)$，由题设知

$$\cos 30^\circ=\pm\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}||\vec{v}|},$$

由此得

$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\ \sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简得

$$\begin{aligned}&11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2\\&-32(x-1)(y-2)+16(x-1)(z-3)\\&+16(y-2)(z-3)=0.\end{aligned}$$

例 4.2.5 已知圆锥面的准线为 $\vec{r}(u)=(x(u),y(u),z(u))$，顶点 P_0 的向径为 $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$，证明圆锥面的参数方程为

$$\vec{r}=v\vec{r}(u)+(1-v)\vec{r}_0, \quad 其中 u,v 为参数.$$

证 在圆锥上任取一点 $P(x,y,z)$，则点 P 必在圆锥的某一条母线上. 设此母线与准线的交点为 $P_u(x(u),y(u),z(u))$，则

$$\overrightarrow{P_0P}\ /\!/\ \overrightarrow{P_uP_0}.$$

于是 $\exists v$，$\ni$“$\overrightarrow{P_0P}=v\overrightarrow{P_uP_0}$”，即

$$\vec{r}-\vec{r}_0=v(\vec{r}(u)-\vec{r}_0).$$

故圆锥面的参数方程为

$$\vec{r}=v\vec{r}(u)+(1-v)\vec{r}_0.$$

由此可得圆锥面的坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=vx(u)+(1-v)x_0,\\ y=vy(u)+(1-v)y_0,\\ z=vz(u)+(1-v)z_0.\end{cases}$$

2. 锥面的判别法

定义 4.2.2 就三元函数 $f(x,y,z)$，如果 $\exists\lambda$，

$$\ni\text{“}\forall t,f(tx,ty,tz)=t^{\lambda}f(x,y,z)\text{”},$$

则称函数 $f(x,y,z)$ 为 λ 次**齐次函数**. 而方程 $f(x,y,z)=0$ 称为**λ 次齐次方程**.

例如 $f(x,y,z)=x^2+5xy+z^2$ 是 2 次齐次函数. 实因

$$f(tx,ty,tz)=t^2(x^2+5xy+z^2).$$

而 $g(x,y,z)=x^2+5xy+z^2+1$ 不是齐次函数.

定理 4.2.1 如果函数 $F(x,y,z)$ 是齐次函数，则方程 $F(x,y,z)=0$ 表示顶点在原点的锥面方程.

证 由齐次函数的定义知，$\exists\lambda$，

$$\ni\text{“}\forall t,F(tx,ty,tz)=t^{\lambda}F(x,y,z)\text{”},$$

取 $t=0$ 得 $F(0,0,0)=0$，即曲面经过原点. 又

$$\forall P_0(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0),$$

当点 P_0 在曲面上时，$F(x_0,y_0,z_0)=0$，而过原点与点 P_0 的母线方程为

$$l:\begin{cases}x=x_0t,\\ y=y_0t,\\ z=z_0t,\end{cases}$$

代入方程 $F(x,y,z)=0$ 得 $F(x_0t,y_0t,z_0t)=t^{\lambda}F(x_0,y_0,z_0)=0$，所

以直线 l 在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上,故方程 $F(x,y,z)=0$ 表示顶点在原点的锥面方程.

推论 如果三元函数 $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$是齐次的,则方程

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

是顶点在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的锥面方程.

习 题 4.2

1. 求顶点为原点,准线为

$$L:\begin{cases}x^2-2z+1=0,\\ y-z+1=0\end{cases}$$

的锥面方程.

2. 已知锥面的顶点为 $P_0(3,-1,-2)$,准线为

$$L:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

求此锥面方程.

3. 求顶点为原点,准线为

$$L:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=h\neq 0\end{cases}$$

的锥面方程.

4. 求以三个坐标轴为母线的圆锥面的方程.

5. 求顶点为 $P_0(1,2,4)$,轴与平面

$$\pi:2x+2y+z=0$$

垂直,且经过点 $P_1(3,2,1)$的圆锥面的方程.

4.3 旋转曲面

1. 旋转曲面的方程

定义 4.3.1 过空间中一条曲线 Γ 绕定直线 l 旋转的轨迹称为

旋转曲面.

曲线 Γ 称为旋转曲面的母线，定直线称为旋转曲面的轴.

过轴 l 作半平面与旋转面的交线称为旋转曲面的**经线**（参见图 4-3-1），作与轴垂直的平面与旋转曲面的交线称为**纬圆**或**纬线**.

现在来求旋转面的方程. 在空间直角坐标系中，设旋转面的母线方程为

$$\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

旋转轴的方程为

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

则 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在轴 l 上.

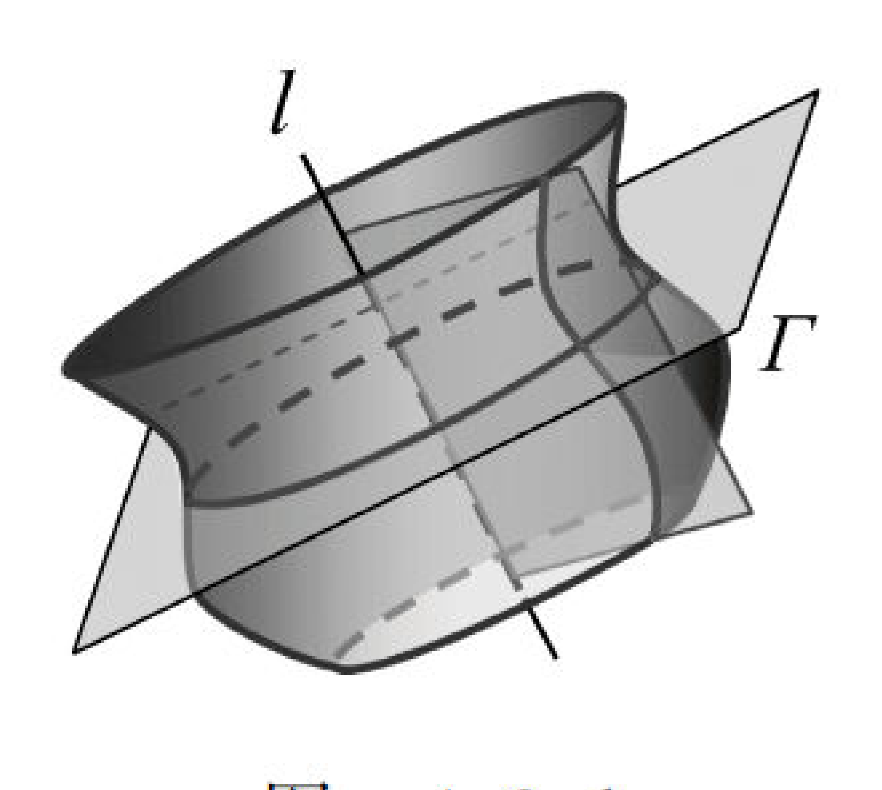


图 4-3-1

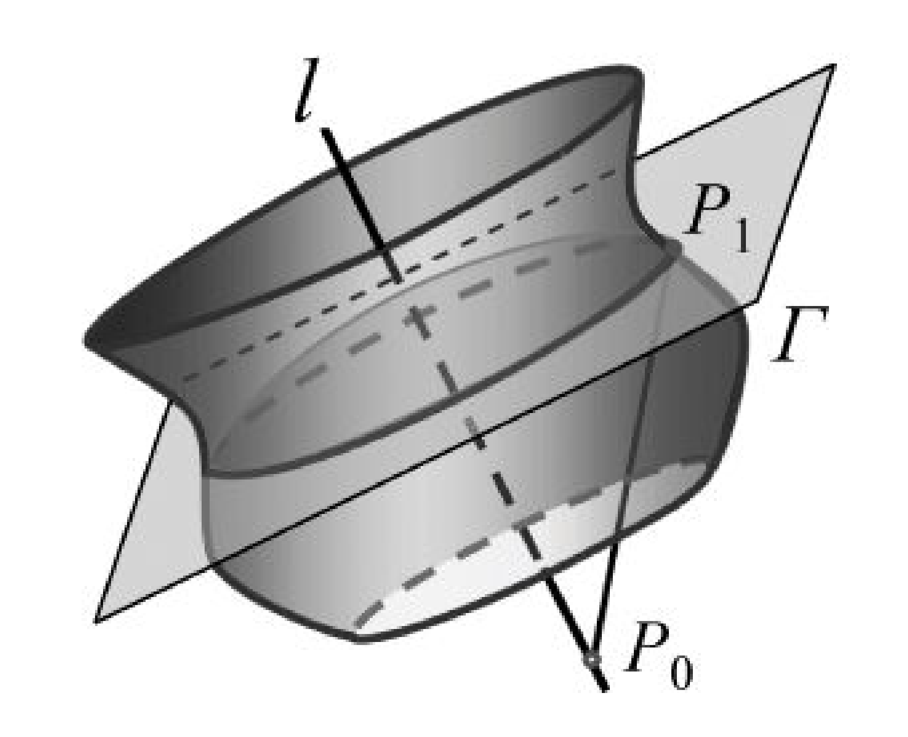


图 4-3-2

$\forall P_1(x_1,y_1,z_1)\in\Gamma$，过点 P_1 的纬圆可视为过点 P_1 而垂直于轴的平面与以点 P_0 为球心以 $|P_0P_1|$ 为半径的球的交线（参见图 4-3-2）. 所以过点 P_1 的纬圆方程为

$$\begin{cases}m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0,\\ \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\\ =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2.\end{cases}$$

由于

$$\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0,\\F_2(x_1,y_1,z_1)=0,\end{cases}$$

所以由四个方程消去 x_1,y_1,z_1 后，就得到以直线 l 为轴以曲线 Γ 为准线的旋转面的方程

$$F(x,y,z)=0.$$

例 4.3.1 求直线

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

绕直线 $x=y=z$ 旋转所得旋转面的方程.

解 在母线

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

上取点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，因为轴通过原点，所以过点 P_1 的纬圆方程为

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0,\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2.\end{cases}$$

又由

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0}$$

得 $x_1=2y_1, z_1=1$，代入方程组中的第一个方程得

$$y_1=\frac{x+y+z-1}{3},\quad x_1=\frac{2(x+y+z-1)}{3}.$$

代入方程组中的第二个方程得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(x+y+z-1)^2}{9}+\frac{4(x+y+z-1)^2}{9}+1,$$

即 $2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+yz+xz)+5(x+y+z)-7=0$ 为所求.

2. 以坐标轴为旋转轴的旋转面方程

由于旋转曲面的经线是平面曲线，所以我们可以选一条经线作为旋转曲面的母线. 在直角坐标系下，选坐标轴为旋转轴，再取坐标面上的曲线作为母线，由此而得到的旋转面具有其特殊的构形.

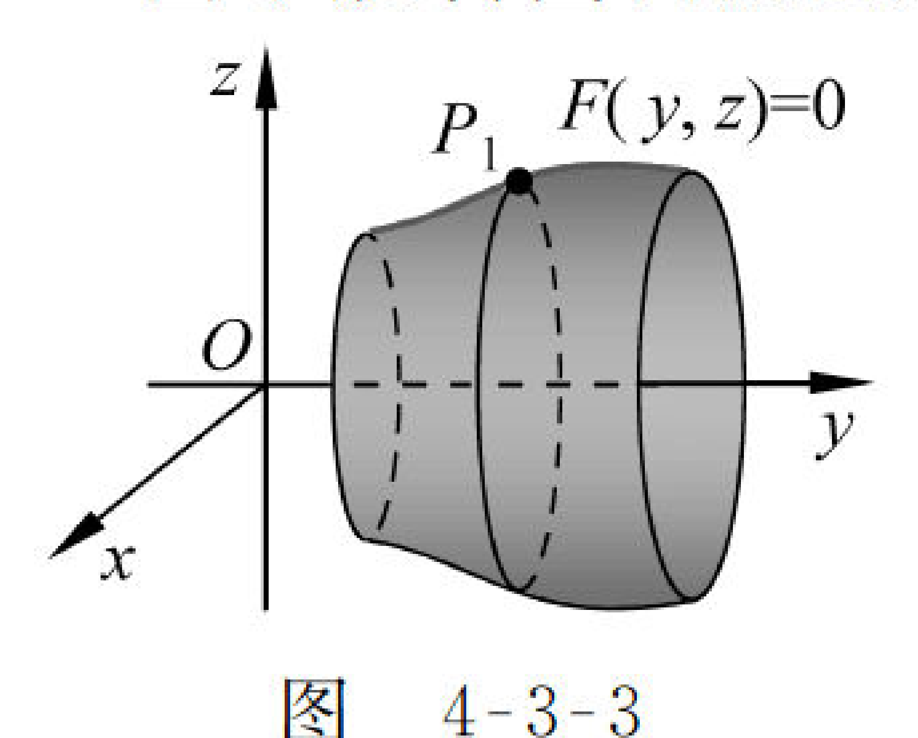


图 4-3-3

如图 4-3-3 所示，取旋转面的母线为

$$\Gamma:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$$

其是坐标面 yOz 上的一条曲线,旋转轴是 y 轴,即

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

$\forall P_1(x_1,y_1,z_1)\in\Gamma$,则通过点 P_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y-y_1=0, \\ x^2+y^2+z^2=y_1^2+z_1^2, \end{cases}$$

即 $y_1=y, z_1=\pm\sqrt{x^2+z^2}$. 由于 $F(y_1,z_1)=0$,所以旋转面的方程为

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

实质 坐标平面上的曲线绕该平面上的坐标轴旋转,所得旋转面的方程是:将曲线方程中与旋转轴同名的变元保持,不同名变元换为与轴不同名的两个变元的平方和的平方根即可.

同样,把曲线绕 z 旋转所得旋转面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

例 4.3.2 将椭圆

$$\Gamma:\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases} \quad a>b$$

分别绕长轴(x 轴)与短轴(y 轴)旋转,求旋转面的方程.

解 绕长轴(x 轴)旋转的旋转面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}{b^2}=1,$$

即$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 为所求.

此图形称为**长形旋转椭球面**(参见图 4-3-4). 同理可得,绕短轴(y 轴)旋转的旋转面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

此图形称为**扁形旋转椭球面**(参见图 4-3-5).

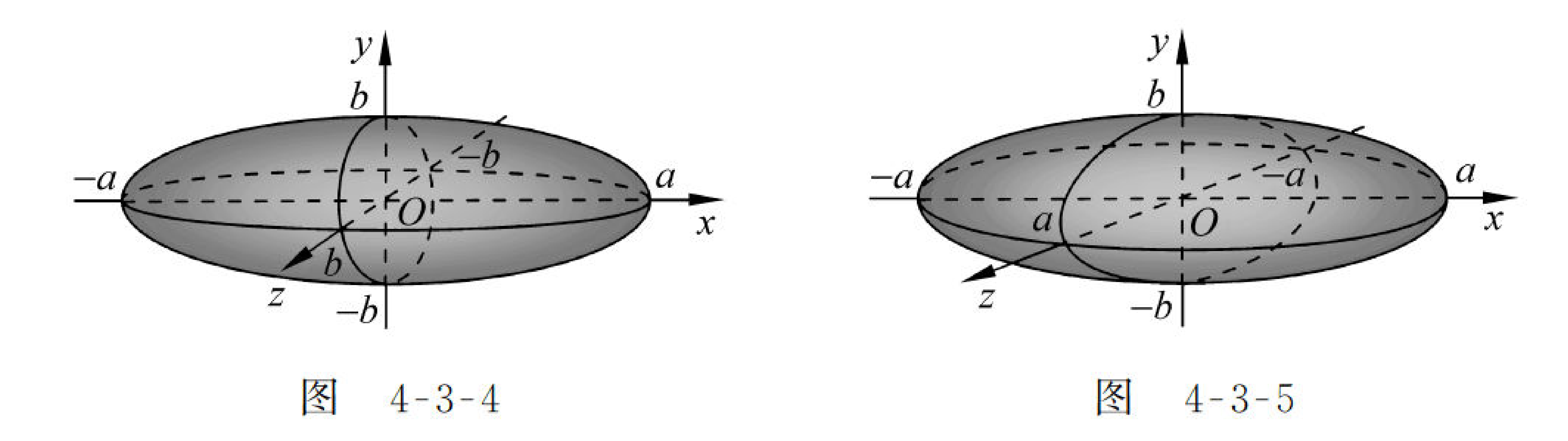


图　4-3-4　　　　图　4-3-5

例 4.3.3　将双曲线

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}$$

分别绕虚轴(z 轴)与实轴(y 轴)旋转,求旋转面的方程.

解　绕虚轴(z 轴) 旋转的旋转面方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

此图形称为**单叶旋转双曲面**(参见图 4-3-6).

同理可得绕实轴(y 轴)旋转的旋转面方程为

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

此图形称为**双叶旋转双曲面**(参见图 4-3-7).

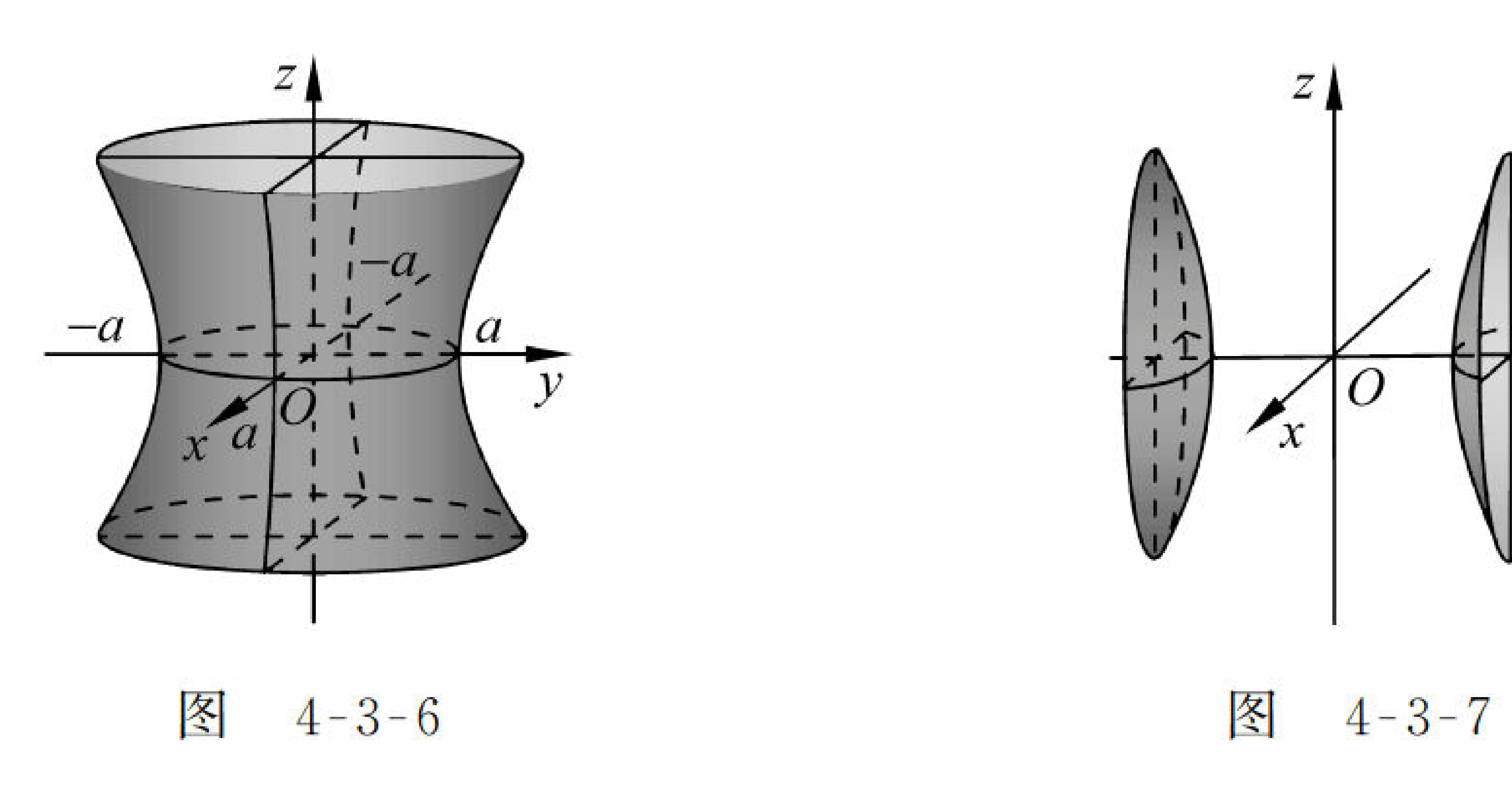


图　4-3-6　　　　图　4-3-7

例 4.3.4　将抛物线

$$\Gamma:\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕它的对称轴(z 轴)旋转,求旋转面的方程.

解　旋转面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

此曲面称为**旋转抛物面**(参见图 4-3-8).

图　4-3-8

例 4.3.5　将圆

$$\Gamma:\begin{cases} (y-b)^2+z^2=a^2, \\ x=0, \end{cases} \quad b>a>0$$

(参见图 4-3-9)绕 z 轴旋转,求旋转面的方程.

解　旋转面的方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

化简得

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2),$$

其图形像救生圈(见图 4-3-10).

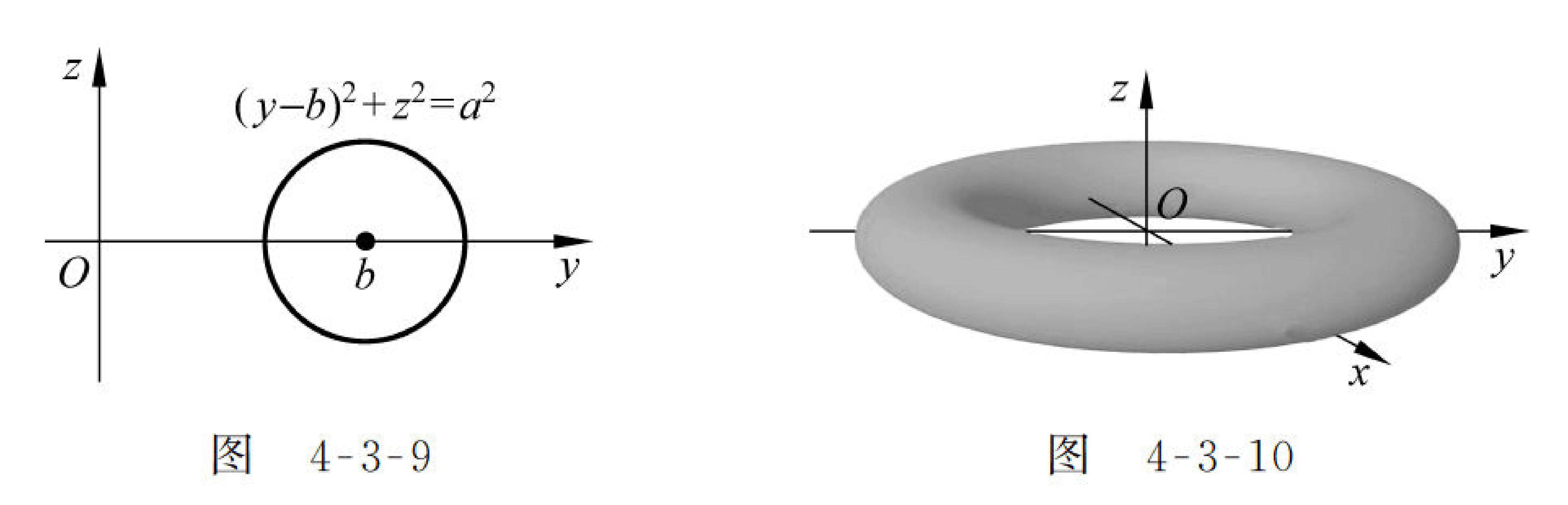


图　4-3-9　　　　图　4-3-10

习　题　4.3

1. 求下列旋转曲面的方程:

(1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$绕$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$旋转;

(2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$绕$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$旋转;

(3) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕 z 轴旋转.

2. 将直线$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转,求这旋转曲面的方程,并就 α 和 β 的可能值讨论曲面的形状.

3. 已知曲线 Γ 的参数方程为 $x=x(u),y=y(u),z=z(u)$,将曲线 z 轴旋转,求旋转曲面的参数方程.

4.4 椭 球 面

定义 4.4.1 在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

给出的曲面称为椭球面.上面给出的方程称为椭球面的标准方程.其中 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$,通常约定 $a\geqslant b\geqslant c$(参见图 4-4-1).

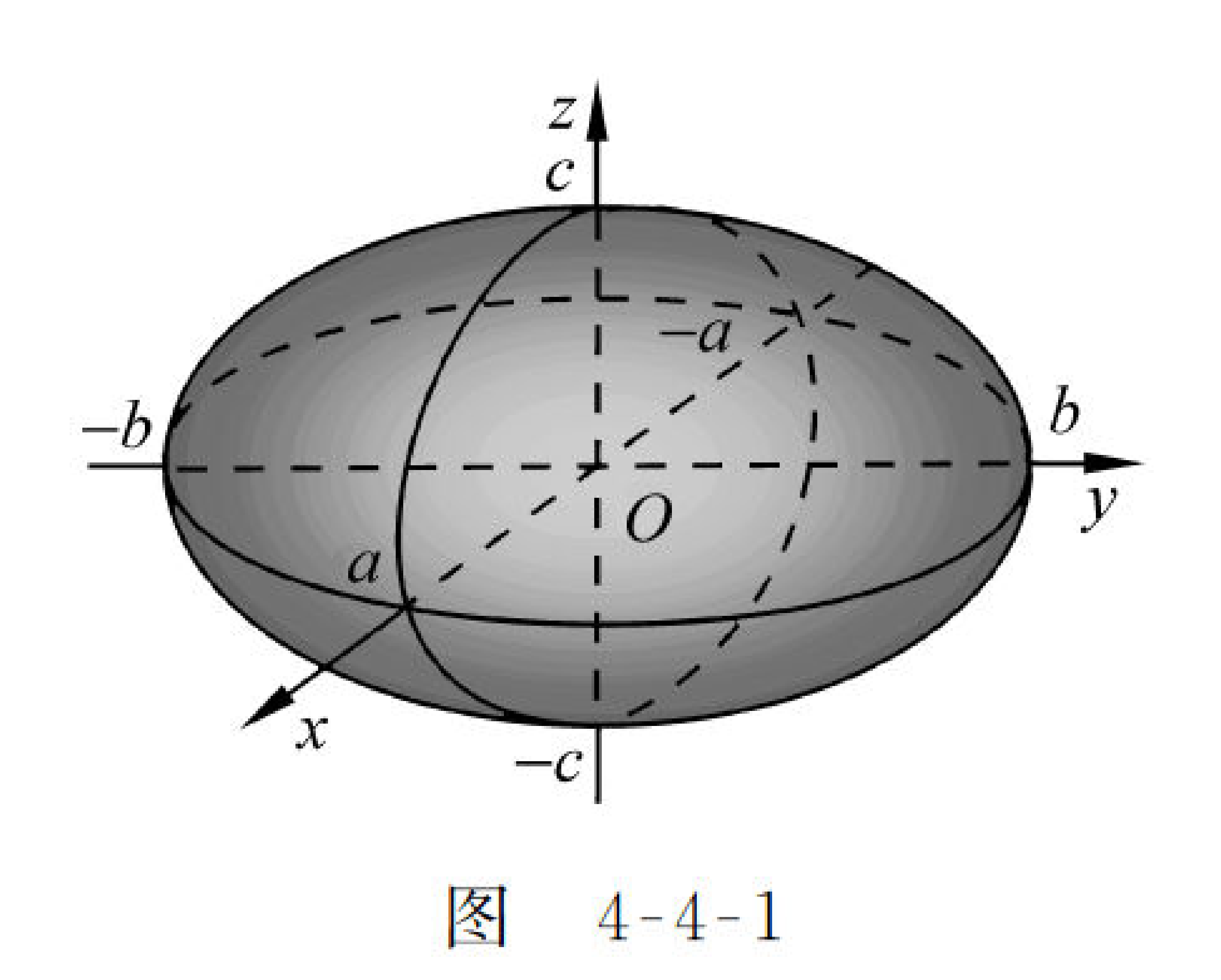


图 4-4-1

因为椭球面的方程中只含有坐标的平方项,可见(x,y,z)满足方程时,$(\pm x,\pm y,\pm z)$也满足,所以椭球面关于坐标面、坐标轴、原点都对称.

椭球面与坐标轴的交点为

$$(\pm a,0,0),\quad (0,\pm b,0),\quad (0,0,\pm c),$$

这些点称为椭球面的顶点.椭球面上所有的点 $P(x,y,z)$都满足

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c,$$

所以椭球面位于长方体$\{(x,y,z):|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|z|\leqslant c\}$的内部.又椭球面与坐标面的交线是

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

这些交线称为椭球面的主截线.

为了认清空间曲面的形状,常用一种方法,这种方法称为截口法,即用一组平行平面与空间曲面相交,交线是平面曲面.这些交线我们称为截口线.然后由这些截口线的构形得到空间曲面的认识.例如地形图就是用这种方法获得的,我们从地形图中的等高线得到了地形地貌的认识.

就空间曲面,我们常用一组平行于坐标面的平面与其相交,所得到的截口线可以帮助我们了解空间曲面的特征.

对于椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

平行于坐标面 xOy 的截口线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases}\qquad |h|<c.$$

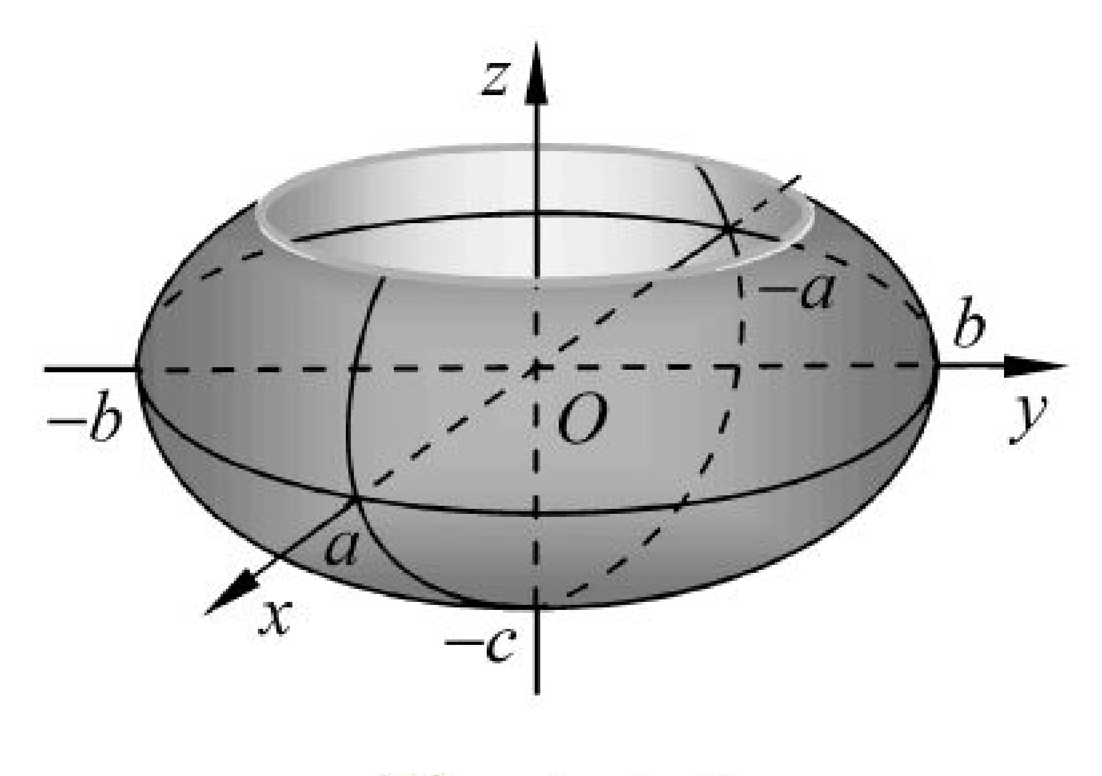


图 4-4-2

化简得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$ 即截口线是一个椭圆(参见图 4-4-2).

截口线变形为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

则知长半轴,短半轴为

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

顶点为

$$\left(\pm a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},0,h\right)\quad 与\quad \left(0,\pm b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},h\right).$$

平行于坐标面 xOz 与 yOz 的截口线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=h,\end{cases}\quad |y|<b$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=h,\end{cases}\quad |x|<a.$$

化简后分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h,\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2},\\ x=h.\end{cases}$$

截口线都是椭圆.

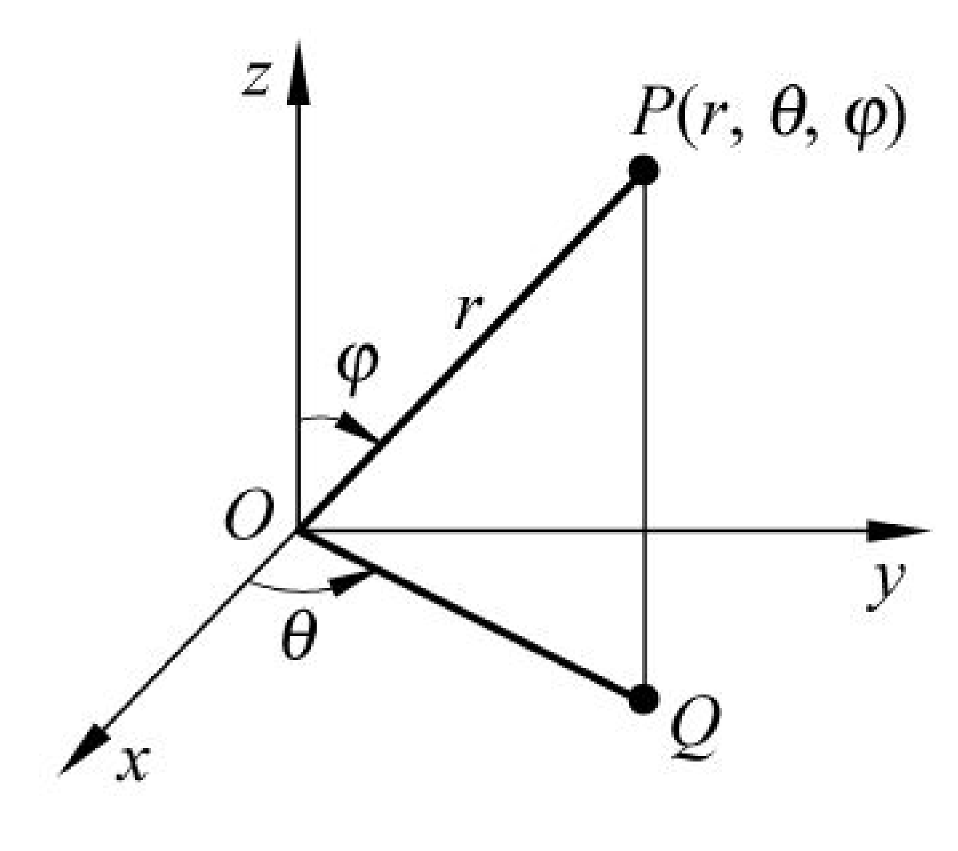


图 4-4-3

椭球面除了标准方程外,还有参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\cos\varphi,\\ x=b\sin\theta\cos\varphi,\\ x=c\sin\varphi,\end{cases}$$

其中 $0\leqslant\theta<2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 参数的几何意义由图 4-4-3 给出.

例 4.4.1 已知椭球面的轴与坐标轴重合,且通过椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{cases}$$

与点 $P(1,2,\sqrt{23})$,求这个椭球面的方程.

解 因为椭球面的轴与坐标轴重合,所以其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 a,b,c 为待定系数. 由其在 xOy 坐标面上的交线知 $a=3,b=4$. 又点 $P(1,2,\sqrt{23})$在椭球面上,所以

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1.$$

即 $c^2=36$，故$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$ 为所求.

例 4.4.2　作出平面 $x-2=0$ 与椭球面

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

的交线的图形.

解　(1) 建立坐标系(参见图 4-4-4)；

(2) 确定顶点；

(3) 绘制椭球面与三个坐标面的交线，则得椭球面；

(4) 在 x 轴上取 $x=2$ 的点，过此点作平行于坐标面 yOz 的平面与主截线相交而得四点.

(5) 过这四点所作的椭圆即为所求(参见图 4-4-5).

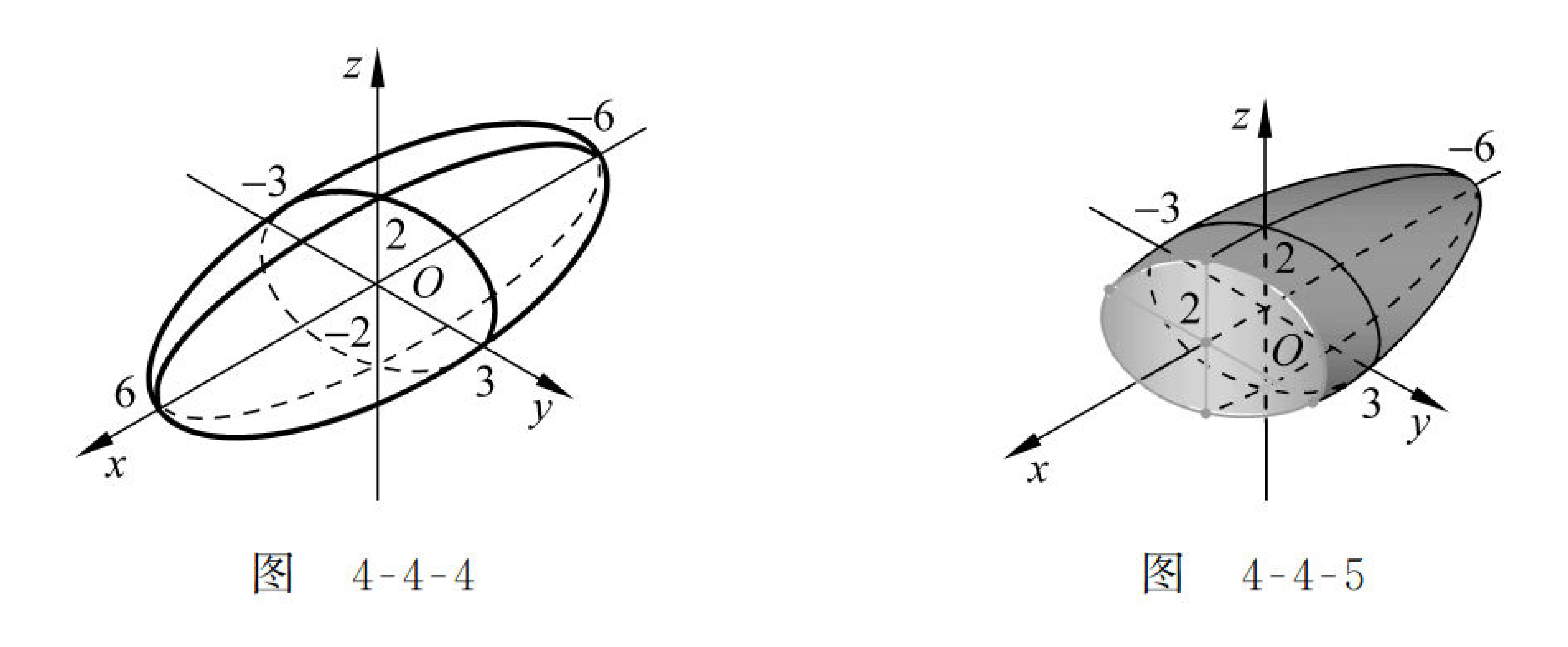


图　4-4-4　　　　图　4-4-5

习　题　4.4

1. 设动点与点(1,0,0)的距离等于从这点到平面 $x=4$ 的距离的一半，求此动点的轨迹.

2. 由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心沿一定方向到曲面上的一点的距离是 r，设定方向的方向余弦为(m,n,p)，证明：

$$\frac{1}{r^2}=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}.$$

3. 由椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心引三条两两相互垂直的射线，分别交曲面于 P_1,P_2,P_3，设 $OP_1=r_1,OP_2=r_2,OP_3=r_3$，证明：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

4. 已知椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (c<b<a),$$

求过 x 轴并与曲面的交线是圆的平面.

4.5 双 曲 面

1. 单叶双曲面

定义 4.5.1 在直角坐标系下由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

给出的曲面称为**单叶双曲面**. 上面给出的方程称为单叶双曲面的标准方程. 其中 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$.

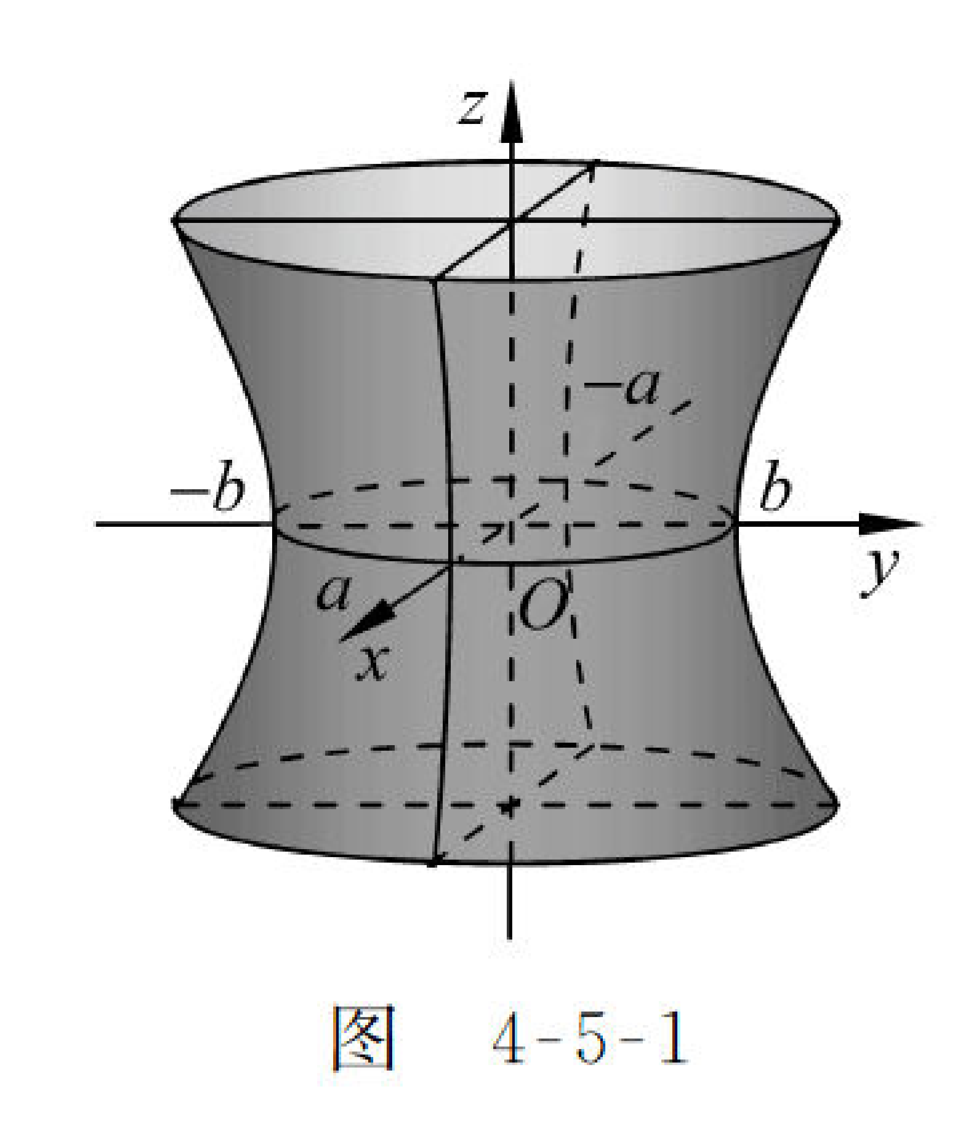


图 4-5-1

因为方程中只含有坐标的平方项，所以单叶双曲面关于坐标面、坐标轴以及原点对称.

单叶双曲面与 z 轴不相交，与 x 轴相交于点 $(\pm a,0,0)$，与 y 轴相交于点 $(0,\pm b,0)$，这四点称为单叶双曲面的顶点(参见图 4-5-1).

单叶双曲面与坐标面的交线是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

腰椭圆　　　双曲线　　　双曲线

如果用平行于 xOy 的平面 $z=h$ 截单叶双曲面,得到的曲线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

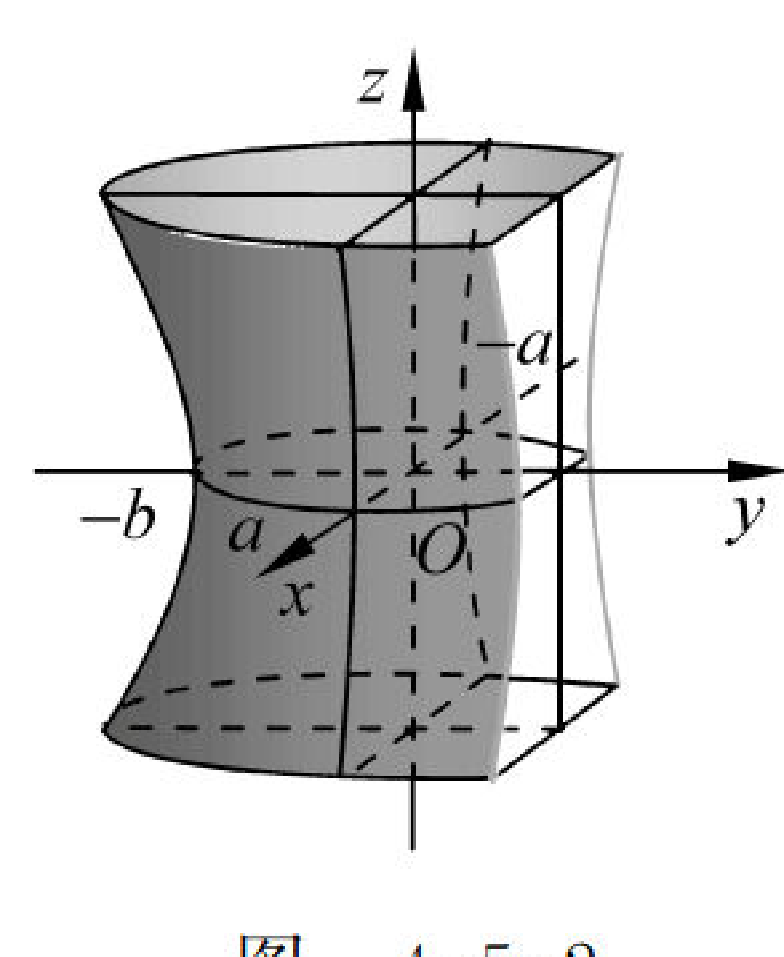


图 4-5-2

如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 截单叶双曲面,当$|h|<b$ 时,截线是双曲线(参见图 4-5-2)

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

当$|h|<b$ 时,截线为相交直线(参见图 4-5-3)

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=\pm b,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0,\\ y=\pm b.\end{cases}$$

当$|h|>b$ 时,截线为双曲线(参见图 4-5-4)

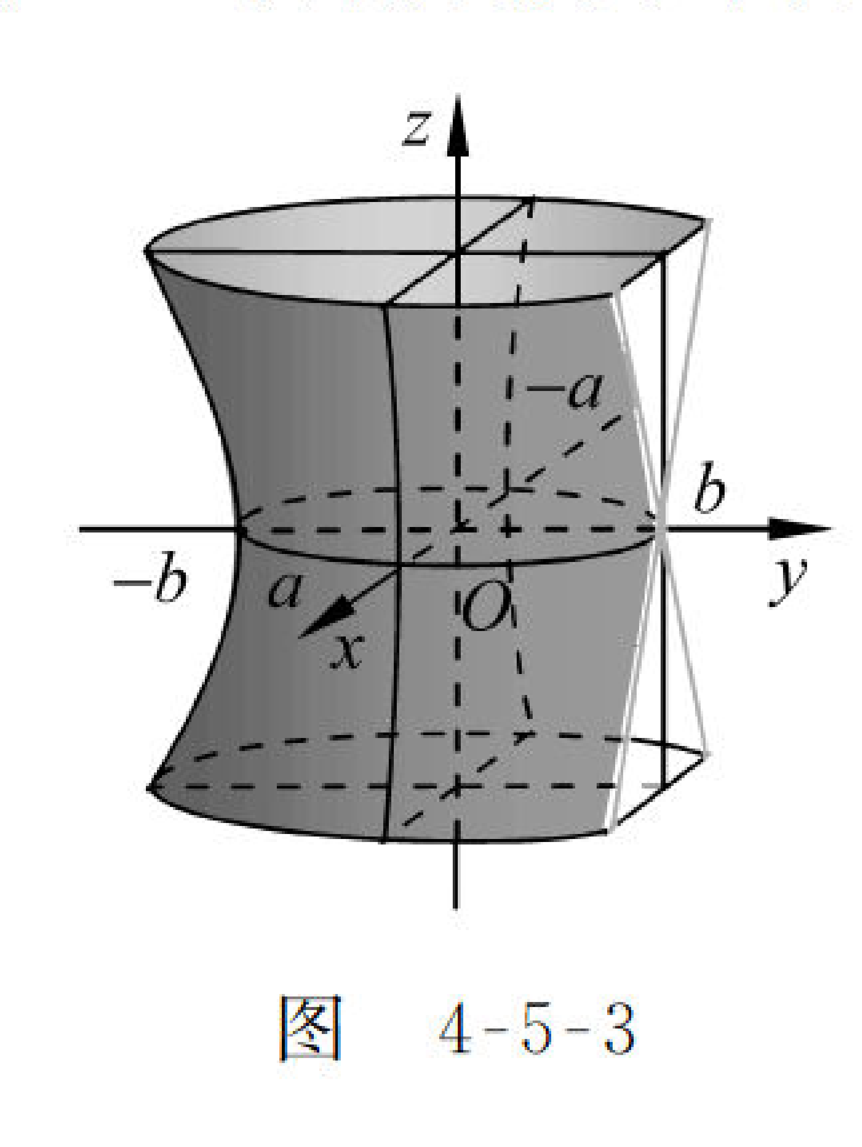


图 4-5-3

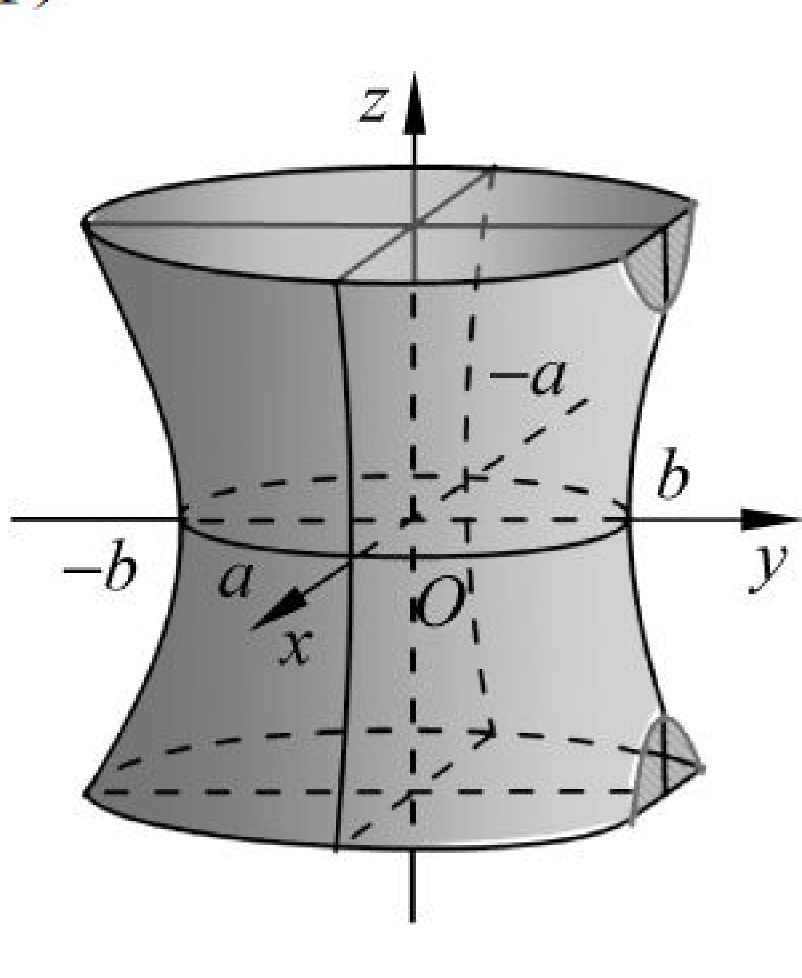


图 4-5-4

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2}-\dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2}=-1,\\ y=h.\end{cases}$$

如果用平行于 yOz 的平面 $x=h$ 截单叶双曲面，得到的曲线与平行于 xOy 的平面 $z=h$ 来截的结果完全类似.

值得注意的是，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 与 \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

给出的曲面都是单叶双曲面. 它们的特征是，二次只有一项为负. 如果有两项为负，则所表示的曲面就是下面所介绍的双叶双曲面.

2. 双叶双曲面

定义 4.5.2 在直角坐标系下由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

给出的曲面称为**双叶双曲面**. 上面给出的方程称为双叶双曲面的标准方程. 其中 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$.

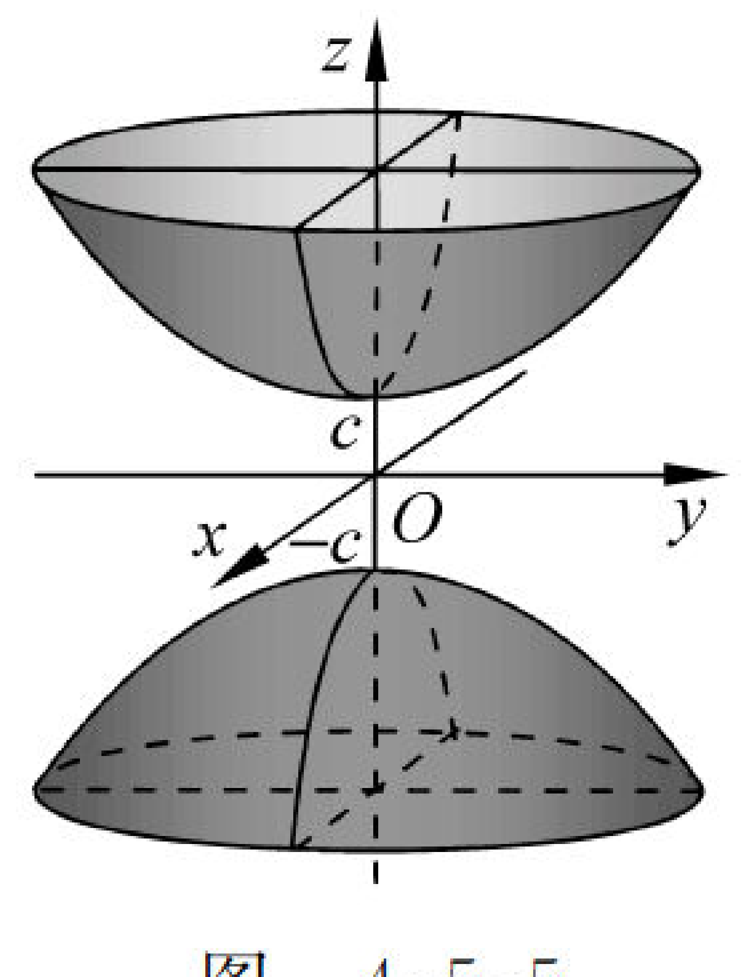


图 4-5-5

因为方程中只含有坐标的平方项，所以双叶双曲面关于坐标面、坐标轴以及原点对称.

双叶双曲面与 x 轴、y 轴都不相交，与 z 轴相交于点

$$(0,0,\pm c),$$

这两点称为双叶双曲面的顶点（参见图 4-5-5).

由图 4-5-5 可知，双叶双曲面上的点的坐

标的第三分量 $|z|\geqslant c$,因此曲面分为两个部分 $z\geqslant c$ 与 $z\leqslant -c$,故称为双叶双曲面. 于是对平行于 xOy 的平面 $z=h$,当 $|z|<c$ 时与双叶双曲面没有交点,当 $|z|=c$ 时与双叶双曲面交于顶点,当 $|z|>c$ 时与双叶双曲面的交线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$

椭圆的两个半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\quad 与\quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

而坐标面 xOz 与 yOz 与曲面的交线都是双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

另外,方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\quad 与\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的曲面都是双叶双曲面.

例 4.5.1 用一组平行平面 $z=h$(任意实数)截割单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad (a>b)$$

得一簇椭圆,求这些椭圆的焦点的轨迹.

解 截口方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

其长半轴、短半轴分别为

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

所以椭圆的焦点坐标为

$$\left(\pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)},0,h\right).$$

即

$$\begin{cases} a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}x=\pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y=0, \\ z=h, \end{cases}$$

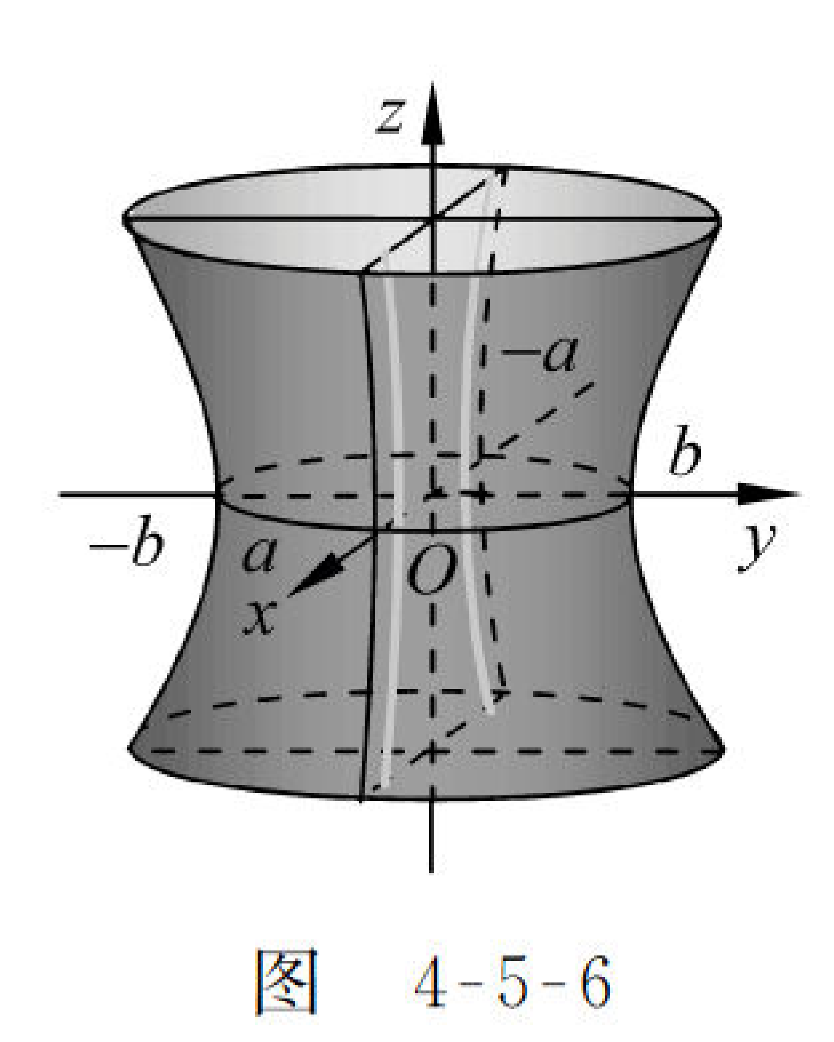


图 4-5-6

消去参数 h 得 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$ 此即所求，其形见图 4-5-6.

习　题　4.5

1. 画出下列双曲面的图形：

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=-1$.

2. 给定方程

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1 \quad (A>B>C>0),$$

试问 λ 取异于 A,B,C 的值时，它表示怎样的图形？

3. 已知单叶双曲面

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,$$

试求一平面，使这平面平行于 yOz 平面且与已知的单叶双曲面的交线是一对相交直线.

4. 设动点 P 与点 $(4,0,0)$ 的距离等于点 P 到平面 $x=1$ 的距离的两倍，求动点 P 的轨迹.

5. 求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$$

与平面 $x-2y+3=0$ 的交线对 xOy 平面的射影柱面方程.

4.6 抛 物 面

1. 椭圆抛物面

定义 4.6.1 在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

给出的曲面称为**椭圆抛物面**.上面给出的方程称为椭圆抛物面的标准方程.其中 $a,b\in\mathbb{R}^+$.

由标准方程可得,椭圆抛物面关于坐标面 xOz 与 yOz 对称,它与坐标轴的交点仅有原点,原点称为其顶点(参见图 4-6-1),而且

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\geqslant 0.$$

所以椭圆抛物面位于 xOy 平面及其上侧,其与坐标面 xOz 与 yOz 的交线为

$$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0,\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}y^2=2b^2z,\\ x=0.\end{cases}$$

图 4-6-1

这两条抛物线称为椭圆抛物面的主抛物线.

如果用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=h(h>0)$ 来截椭圆抛物面,得到的截线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}+\dfrac{y^2}{2b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

这个椭圆的顶点为$(\pm a\sqrt{2h},0,h)$与$(0,\pm b\sqrt{2h},h)$.由此可视椭圆抛物面是由平行于坐标面 xOy 的平面上的椭圆沿主抛物线(即顶点在抛物线上)上下滑动而生成的曲面.

如果用平行于坐标面 xOz 的平面 $y=h$ 来截椭圆抛物面,得到的截线是抛物线

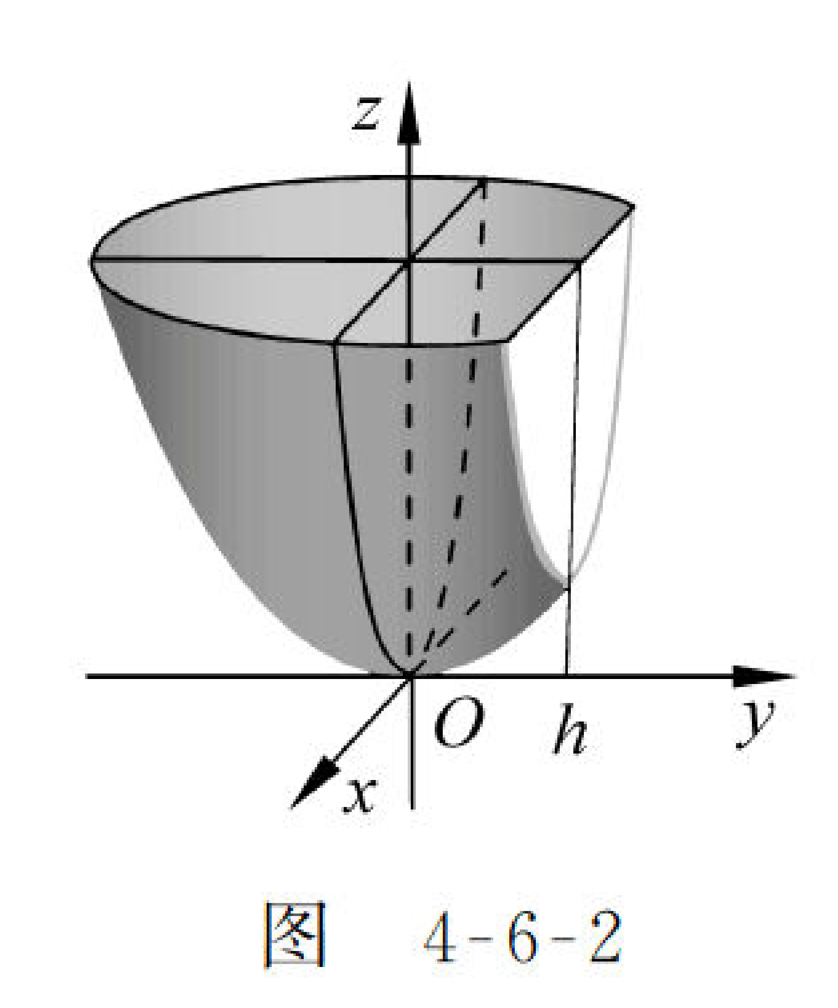


图　4-6-2

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \dfrac{h^2}{2b^2}\right), \\ y = h. \end{cases}$$

与主抛物线对照(参见图 4-6-2),它们的焦参数都是 $2a^2$,由此可视椭圆抛物面是由平行于坐标面 xOz 的平面上的抛物线沿主抛物线(即顶点在抛物线上)上下滑动而生成的曲面.

在椭圆抛物面的方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

中,如果 $a=b$,即 $x^2+y^2=2a^2z$,此时曲面就是旋转抛物面.

2. 双曲抛物面

定义 4.6.2　在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

给出的曲面称为**双曲抛物面**.上面给出的方程称为双曲抛物面的标准方程.其中 $a,b\in\mathbb{R}^+$.

由标准方程可得,椭圆抛物面关于坐标面 xOz 与 yOz 对称,也与 z 轴对称.它与坐标轴的交点仅有原点,原点称为其顶点(参见图 4-6-3).而且其与坐标面 xOy 交线为

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,$$

图　4-6-3

其是两条相交直线.而与坐标面 xOz 与 yOz 的交线为

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y^2 = -2b^2z, \\ x = 0. \end{cases}$$

这两条抛物线称为椭圆抛物面的主抛物线.

如果用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=h(h>0)$ 来截双曲抛物

面,得到的截线是双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}-\dfrac{y^2}{2b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

双曲线的顶点为$(\pm a\sqrt{2h},0,h)$. 当 $h<0$ 时,所得到的双曲线位于坐标面 xOy 的下侧,顶点为$(0,\pm b\sqrt{-2h},h)$.

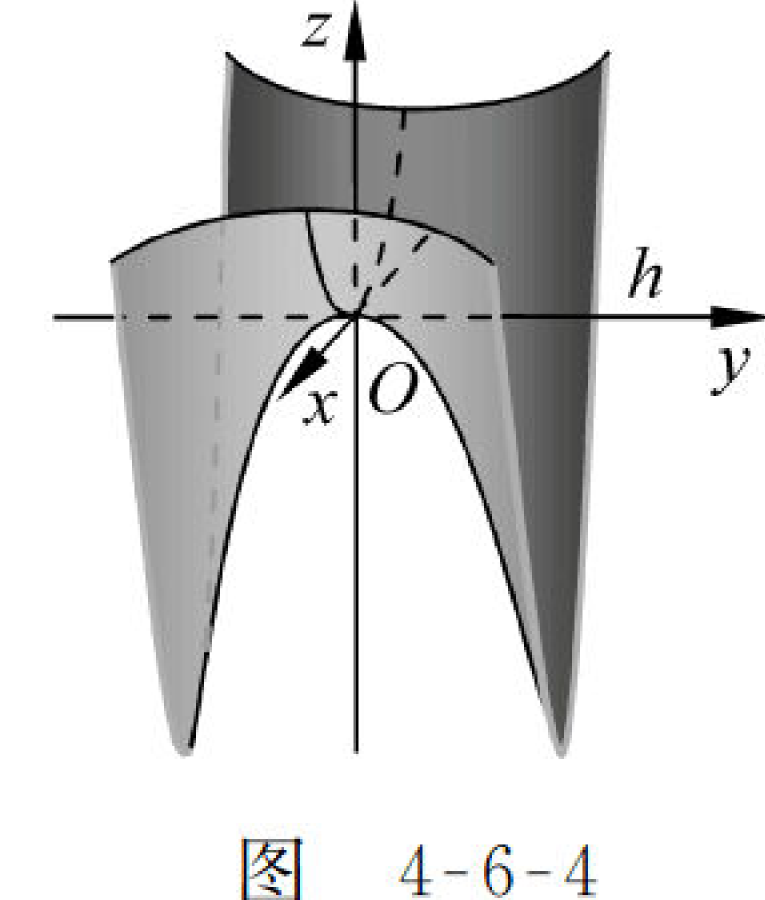


图 4-6-4

如果用平行于坐标面 xOz 的平面 $y=h$ 来截双曲抛物面(参见图 4-6-4),得到的截线是抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2\left(z+\dfrac{h^2}{2b^2}\right),\\ y=h.\end{cases}$$

与主抛物线 $\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0\end{cases}$ 对照,它们的焦参数都是 $2a^2$,由此可视双曲抛物面是由平行于坐标面 xOz 的平面上的抛物线沿主抛物线 $\begin{cases}y^2=-2b^2z,\\ x=0\end{cases}$ (即顶点在抛物线上)上下滑动而生成的曲面.

值得注意的是,椭圆抛物面与双曲抛物面因为没有对称中心,所以它们都是无心的二次曲面.

例 4.6.1 作出球面

$$x^2+y^2+z^2=8$$

与旋转抛物面

$$x^2+y^2=2z$$

的交线.

解 两曲面的交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z,\end{cases}$$

解方程组得 $z=2$,从而

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2 \end{cases}$$

为所求. 这是平面 $z=2$ 上的一个圆(参见图 4-6-5).

例 4.6.2 作出由柱面 $z=4-x^2$,平面 $2x+y=4$ 以及三个坐标面所围几何体在第一卦限内的图形.

解 柱面 $z=4-x^2$ 在 xOz 上的准线是抛物线,母线平行于 y 轴,平面方程 $2x+y=4$ 中不含 z,所以其与 xOy 的交线是

$$2x + y = 4$$

且平行于 z 轴. 故所求立体图如图 4-6-6 所示.

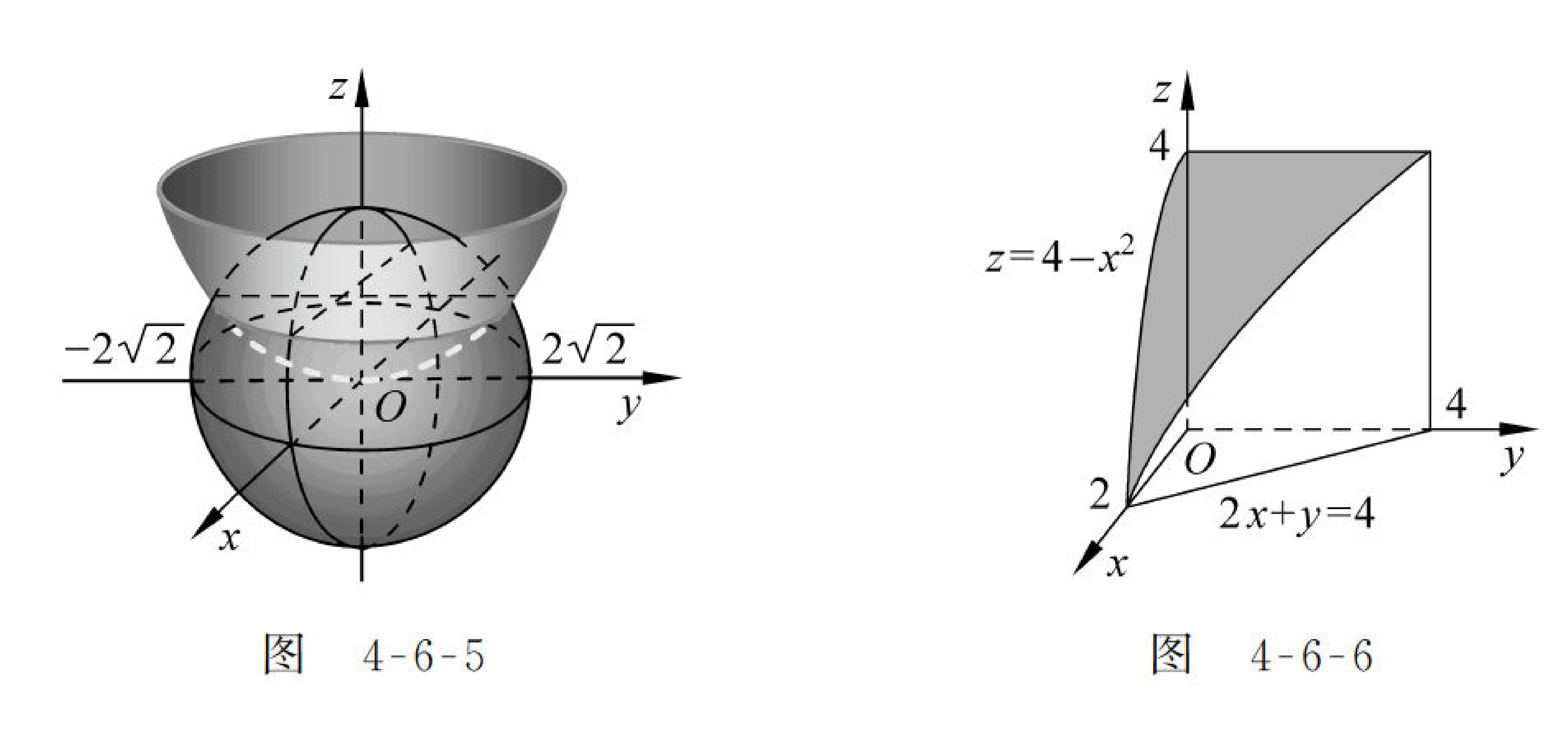


图 4-6-5　　　图 4-6-6

习 题 4.6

1. 已知椭圆抛物面的顶点在原点,对称面为 xOz 面与 yOz 面,且过点(1,2,6)和$\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$,求这个椭圆抛物面的方程.

2. 适当选取坐标系,求下列轨迹的方程:

(1) 到一定点和一平面的距离之比等于常数的点的轨迹;

(2) 已知两异面直线的距离为 $2a$,夹角为 2α,求到此两异面直线等距离的点的轨迹.

4.7 直 纹 面

在前面的学习中,我们已经看到了柱面与锥面是由一簇直线生成的.这种由直线生成的曲面称为**直纹曲面**,生成曲面的直线称为**直母线**.单叶双曲面与抛物双曲面也是直纹曲面,下面我们将分别讨论单叶双曲面与抛物双曲面.

1. 单叶抛物面的直母线

单叶抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. 由标准方程得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

即

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

考察下面的三个方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b},\end{cases}\quad u\neq 0$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ 1-\dfrac{y}{b}=0,\end{cases}\quad \text{和}\quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ 1+\dfrac{y}{b}=0\end{cases}$$

构成的直线簇,其中 u 为参数.我们可以把第二个方程组视为第一个方程组中的 $u=0$ 而得;第三个方程组可视为第一个方程组中的 $u\to\infty$ 而得.由此参数而称这簇直线为 **u 簇直线**.

由于 u 簇直线中的任一条直线都在单叶双曲面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

上，又 $\forall P_0(x_0,y_0,z_0)\in S$，

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

所以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 必在 u 簇直线中的某条直线上，故单叶双曲面是由直线生成，因而单叶双曲面是直纹曲面. 而 u 簇直线是单叶双曲面的直母线，称为 **u 簇直母线**.

取 $u=1$ 得直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1+\dfrac{y}{b},\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{y}{b},\end{cases}$$

两方程相加得 $x=a$，两方程相减得

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

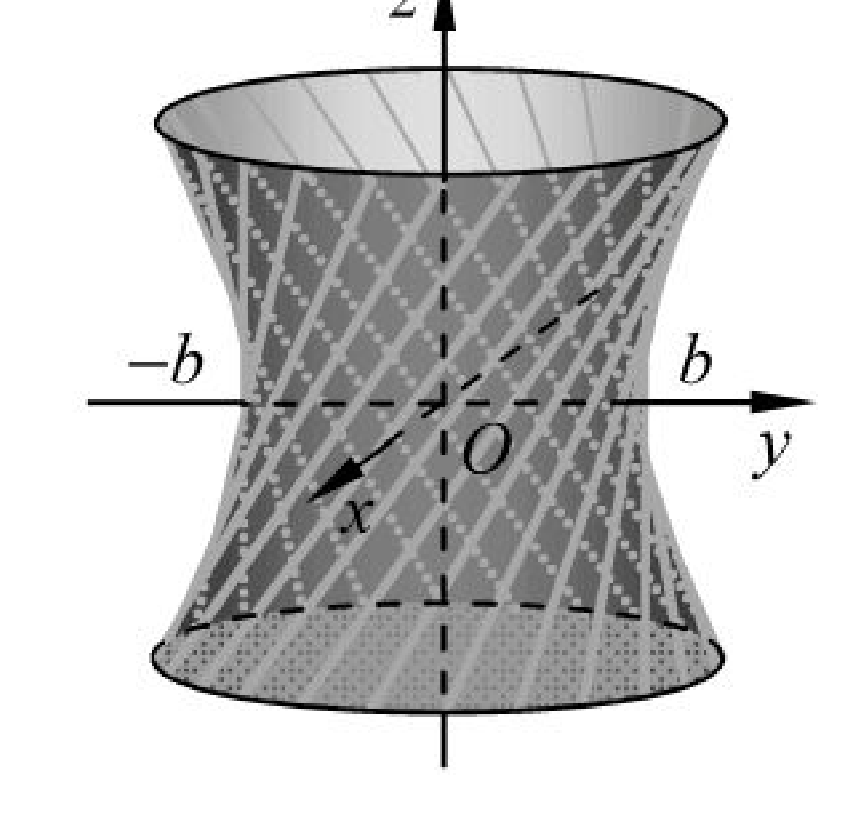


图 4-7-1

于是得射影方程为

$$\begin{cases}x=a,\\[1mm] \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c},\end{cases}$$

直母线的标准方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

从而得到 u 簇直线的分部图(参见图 4-7-1).

同理由三个方程

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b},\end{cases}\quad v\neq 0$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ 1+\dfrac{y}{b}=0,\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ 1-\dfrac{y}{b}=0\end{cases}$$

构成的直线簇，其中 v 为参数. 我们可以把第二个方程组视为第一个方程组中的 $v=0$ 而得；第三个方程组可视为第一个方程组中的 $v\to\infty$ 而得. 由参数而称这簇直线为 **v 簇直线**.

取 $v=1$ 得直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{y}{b},\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1+\dfrac{y}{b},\end{cases}$$

化为标准方程是 $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z}{c}$，从而得到 v 簇直线的分部图(参见图 4-7-2).

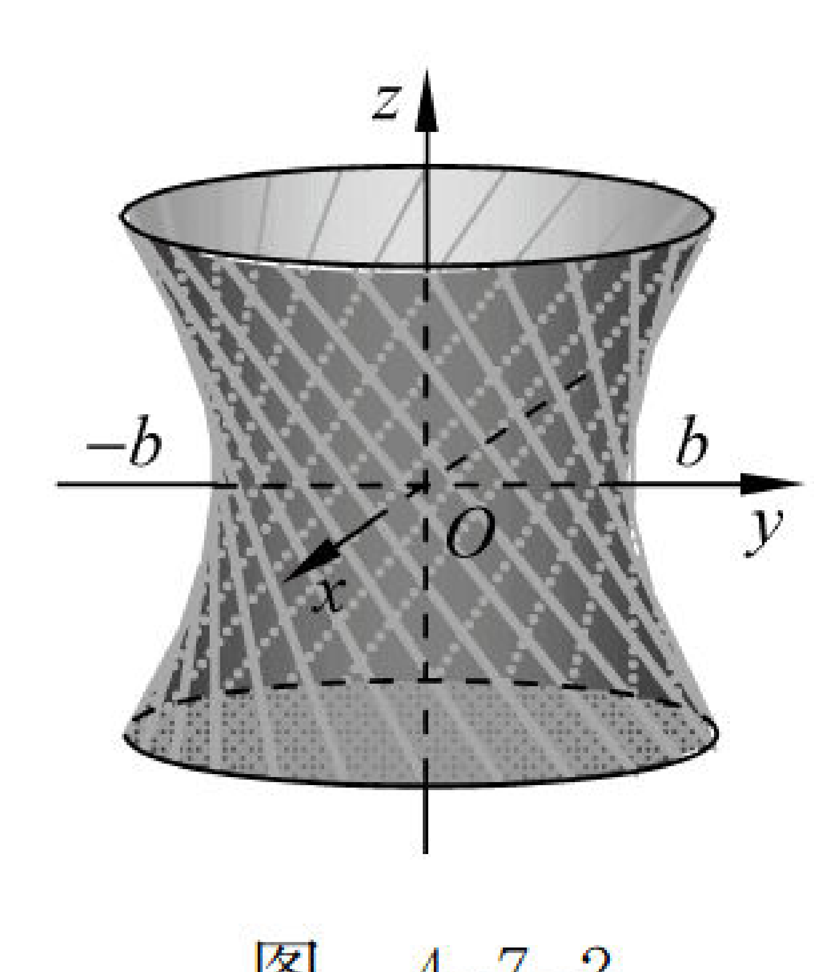


图 4-7-2

由前面的讨论，我们可获得下面的结论.

对于单叶双曲面上的任意一点，两个直线簇中各有一条通过这一点.

为了避免取极限，单叶双曲面的 u 簇直母线可表为

$$\begin{cases}s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=s\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \quad 其中 u,s 不同时为零.$$

这里由 $u:s$ 的值来确定直母线. 同理，v 簇直母线也可表为

$$\begin{cases}t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \quad 其中 v,t 不同时为零.$$

这里由 $v:t$ 的值来确定直母线.

2. 双曲抛物面的直母线

双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\quad 其中\ a,b\in\mathbb{R}^+.$$

由标准方程可得

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z,$$

由此可得双曲抛物面的两簇直母线方程

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u,\\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}\quad 与 \quad\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z.\end{cases}$$

取 $u=0$ 得直母线 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0,\end{cases}$ 化为标准方程为 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z}{0}$，从而得到 u 簇直线的分部图(参见图 4-7-3). 取 $v=0$ 得直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0,\end{cases}$$

化为标准方程为 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{0}$，从而得到 v 簇直线的分部图(参见图 4-7-4).

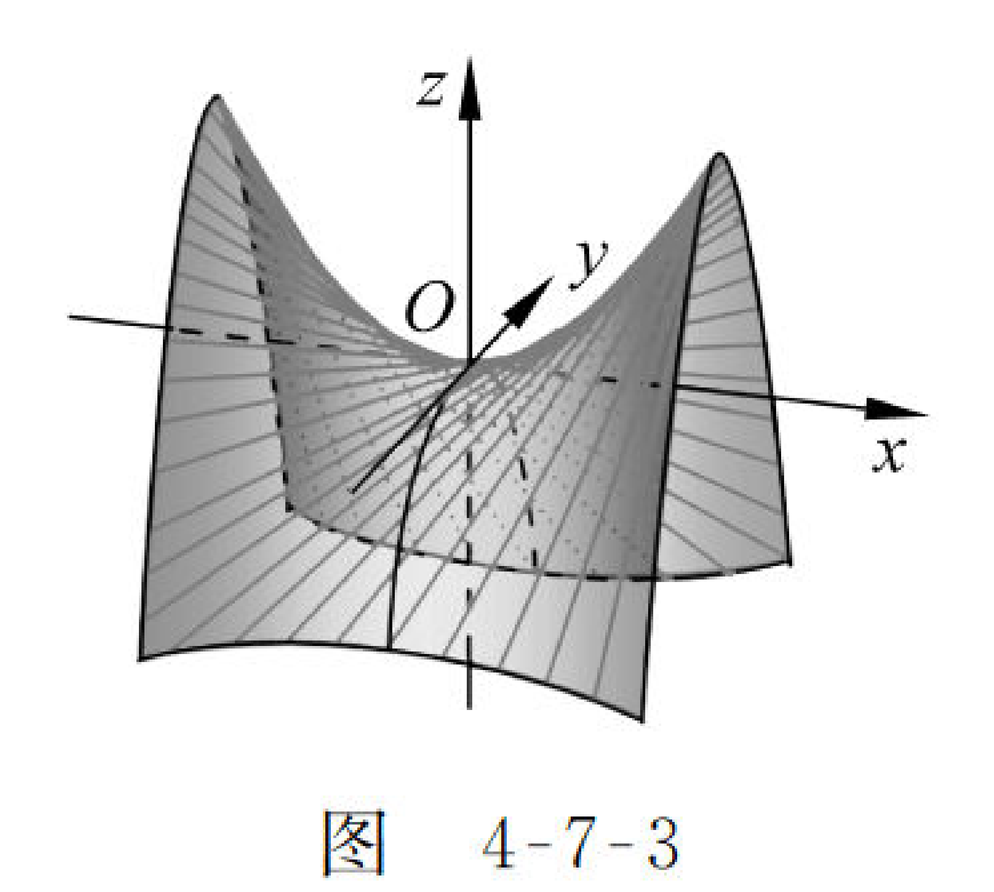


图　4-7-3

图　4-7-4

由前面的讨论,我们也可获得下面的结论.

对于双曲抛物面上的任意一点,两个直线簇中各有一条通过这一点.

单叶双曲面与双曲抛物面的直母线有下面的性质.

定理 4.7.1 单叶双曲面上异簇的两条直母线必共面;双曲抛物面上异簇的两条直母线必相交.

证 单叶双曲面的两个直母线簇的方程为

$$\begin{cases} s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=s\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

因为四个线性方程的系数与常数项构成的行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{s}{a} & -\dfrac{u}{b} & \dfrac{s}{c} & -u \\ \dfrac{u}{a} & \dfrac{s}{b} & -\dfrac{u}{c} & s \\ \dfrac{t}{a} & \dfrac{v}{b} & \dfrac{t}{c} & -v \\ \dfrac{v}{a} & -\dfrac{t}{b} & -\dfrac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = -\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} s & -u & s & -u \\ u & s & -u & s \\ t & v & t & -v \\ \dfrac{v}{a} & -\dfrac{t}{b} & -\dfrac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = 0.$$

所以单叶双曲面上异簇的两条直母线必共面.

双曲抛物面上异簇的两条直母线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z, \end{cases}$$

变形为

$$\begin{cases} bx+ay=2abu, \\ bux-auy=abz, \end{cases} \quad \begin{cases} bx-ay=2abv, \\ bvx+avy=abz, \end{cases}$$

四个线性方程的系数与常数项构成的行列式不为零，所以有唯一

解，故异簇的两条直母线必相交.

定理 4.7.2 单叶双曲面上同簇的两条直母线必异面；双曲抛物面上同簇的两条直母线必共面.

这个定理的证明留作习题.

例 4.7.1 求过单叶双曲面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$上的点(6,2,8)的直母线的方程.

解 u 簇的直母线方程为

$$\begin{cases} s\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=u\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ u\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=s\left(1-\frac{y}{2}\right), \end{cases}$$

把点(6,2,8)代入方程得 $s:u=1:2$，于是过点(6,2,8)的 u 簇的直母线方程为

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{z}{4}=2\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ 2\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=1-\frac{y}{2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0. \end{cases}$$

v 簇的直母线方程为

$$\begin{cases} t\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=v\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ v\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=t\left(1+\frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

把点(6,2,8)代入方程得 $t=0$，于是过点(6,2,8)的 v 簇的直母线方程为

$$\begin{cases} y-2=0, \\ 4x-3z=0. \end{cases}$$

习 题 4.7

1. 求下列直纹曲面的直母线的方程：

（1）$x^2-y^2-z^2=0$； （2）$z=axy$.

2. 求下列直线簇所成的曲面(其中 λ 为参数)：

（1）$\dfrac{x-\lambda^2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-\lambda}{0}$； （2）$\begin{cases}x+2\lambda y+4z=4\lambda,\\ \lambda x-2y-4\lambda z=4.\end{cases}$

4.8 数 学 制 图

就二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$,其图像一般是空间一张曲面.要绘制这张曲面,就得知道绘图的方法与识图的方法.

绘图的实质是将空间的几何形体变为平面上的图形,而识图是看着平面上的图形能想象出空间的形体来,这就是所谓的空间想象能力.即：

$$\text{空间}\xrightarrow{\text{绘图}}\text{平面},\quad \text{平面}\xrightarrow{\text{识图}}\text{空间}.$$

所以说,知道了绘图的方法,就会获得识图的方法.要掌握绘图的方法,就得知道绘图的规定.

1. 坐标系的建立

数学绘图,必须给出坐标,空间坐标皆用右手系.坐标系的建立,实质是给出观察者的位置.如图 4-8-1 所示.

观察者的位置,决定了绘图的质量.

2. 几何要素的规定

空间的几何要素有点、线、面,平面上的几何要素只有点、线,于是规定用平面上的点表示空间中的点,用平面上的线表示空间中的

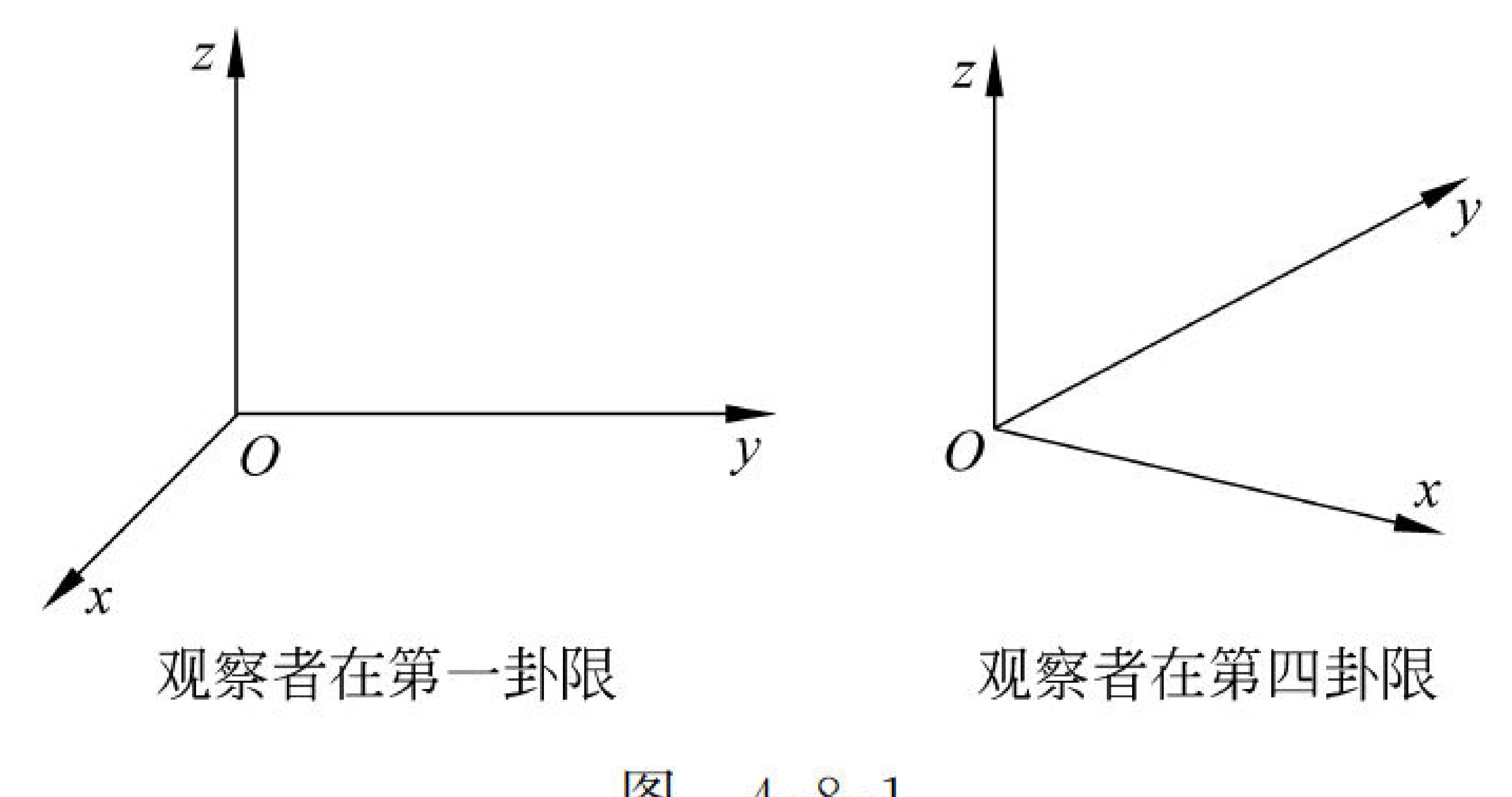


图　4-8-1

线，而空间中的面用平面上的封闭曲线即框图表示. 例如中学的几何中就用平行四边形表示平面.

3. 框图绘制的规定

空间几何体的轮廓线是构成框图的基本线，当几何体的轮廓线不能构成框图时，可用过渡线，如圆柱得用两条母线来构成框图，这两条母线就是过渡线. 除此之外，还得用下面的规定来绘制框图.

(1) 由与坐标面的交线给出

例 4.8.1　绘制

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形.

解　1°　建立坐标系如图 4-8-2 所示.

2°　求与坐标面的交线.

与坐标面 xOy 的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

即椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{参见图 4-8-3}).$$

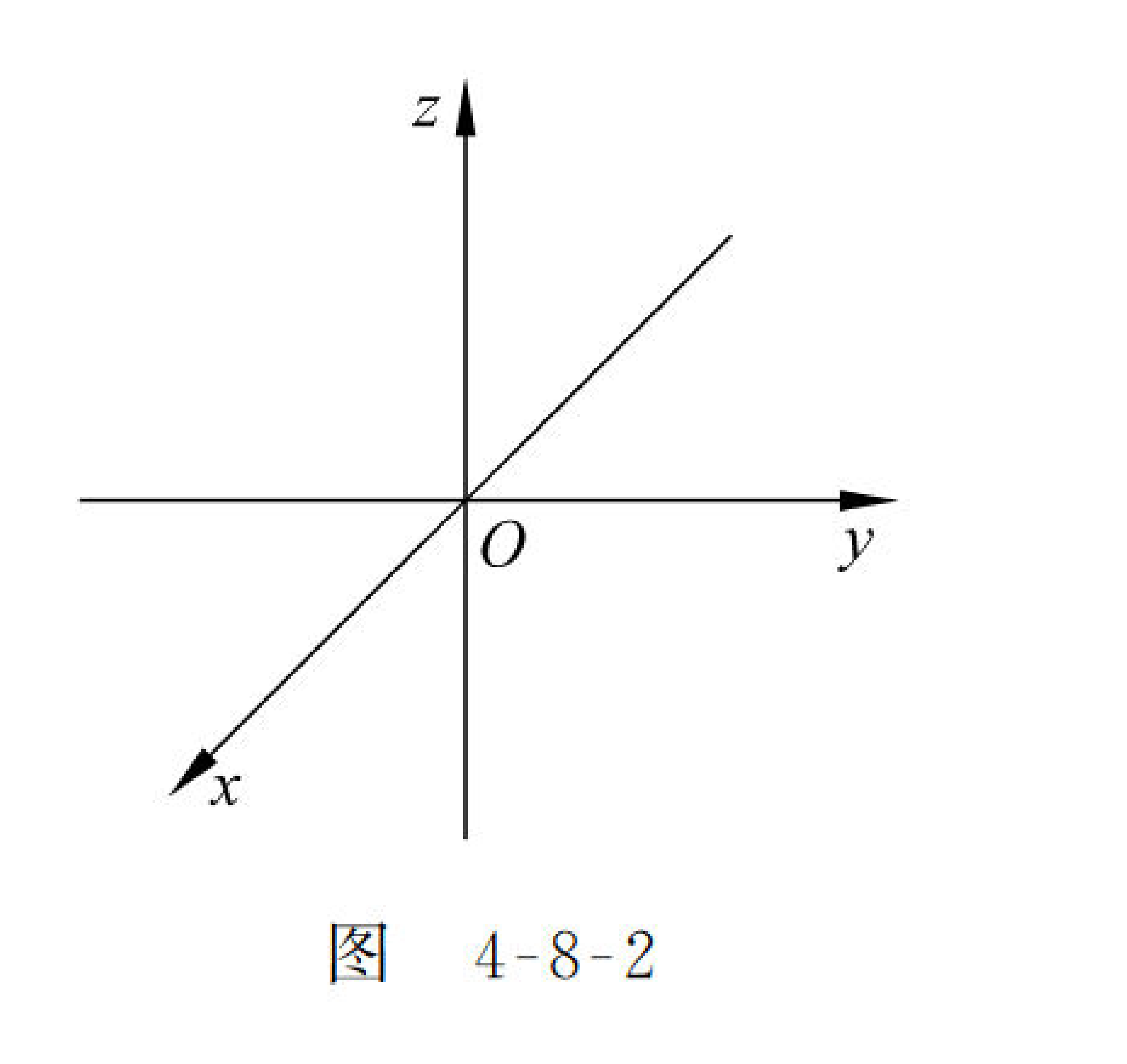


图 4-8-2

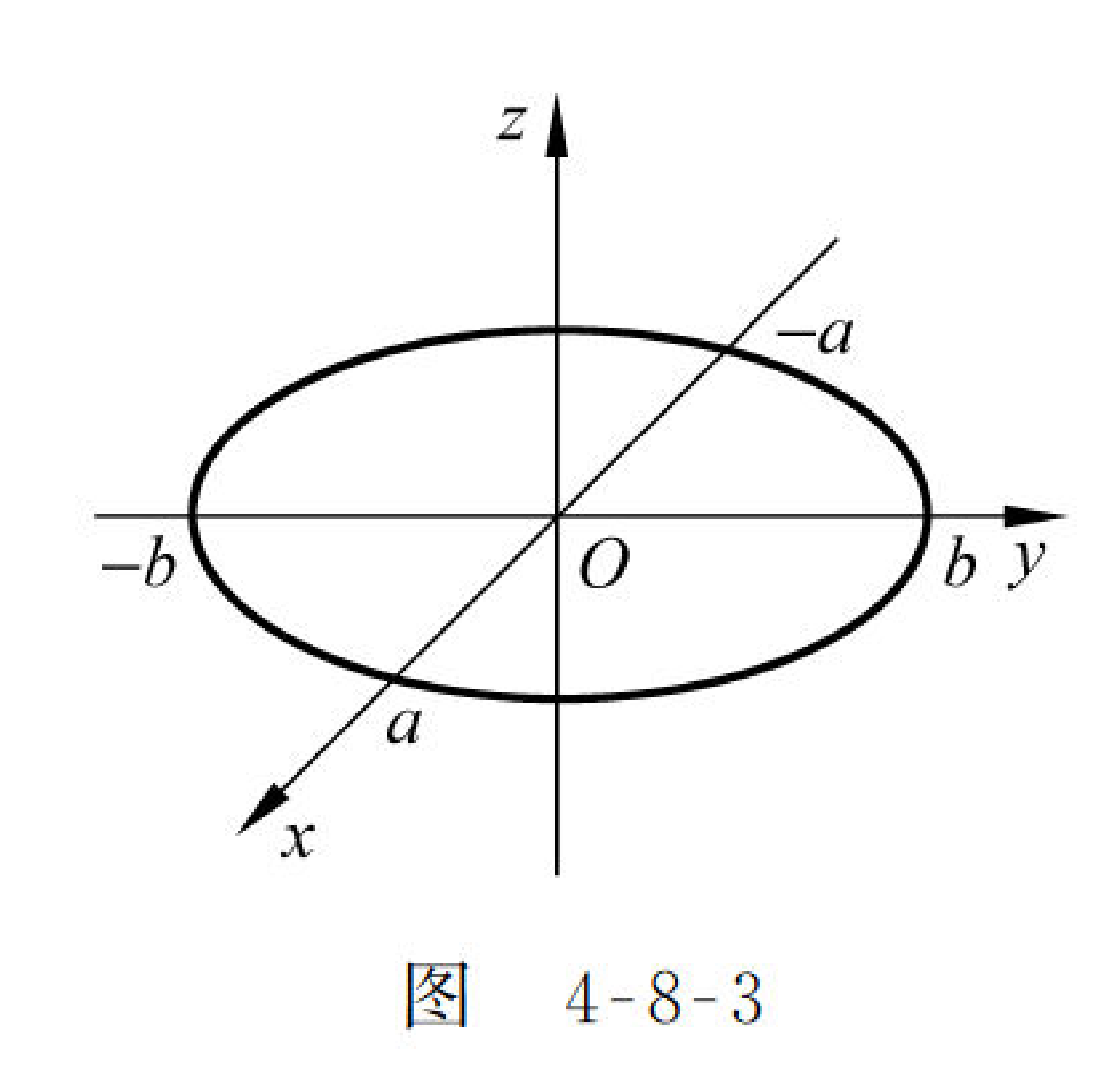


图 4-8-3

同理可得其他两个坐标面上的交线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3° 将不可见线绘为虚线即得成图(参见图 4-8-4).

由于有时绘制全图较为复杂,常常只绘制第一卦限中的图,然后通过空间想象得到全图,这样的图称为简图. 例如椭球的简图如图 4-8-5 所示.

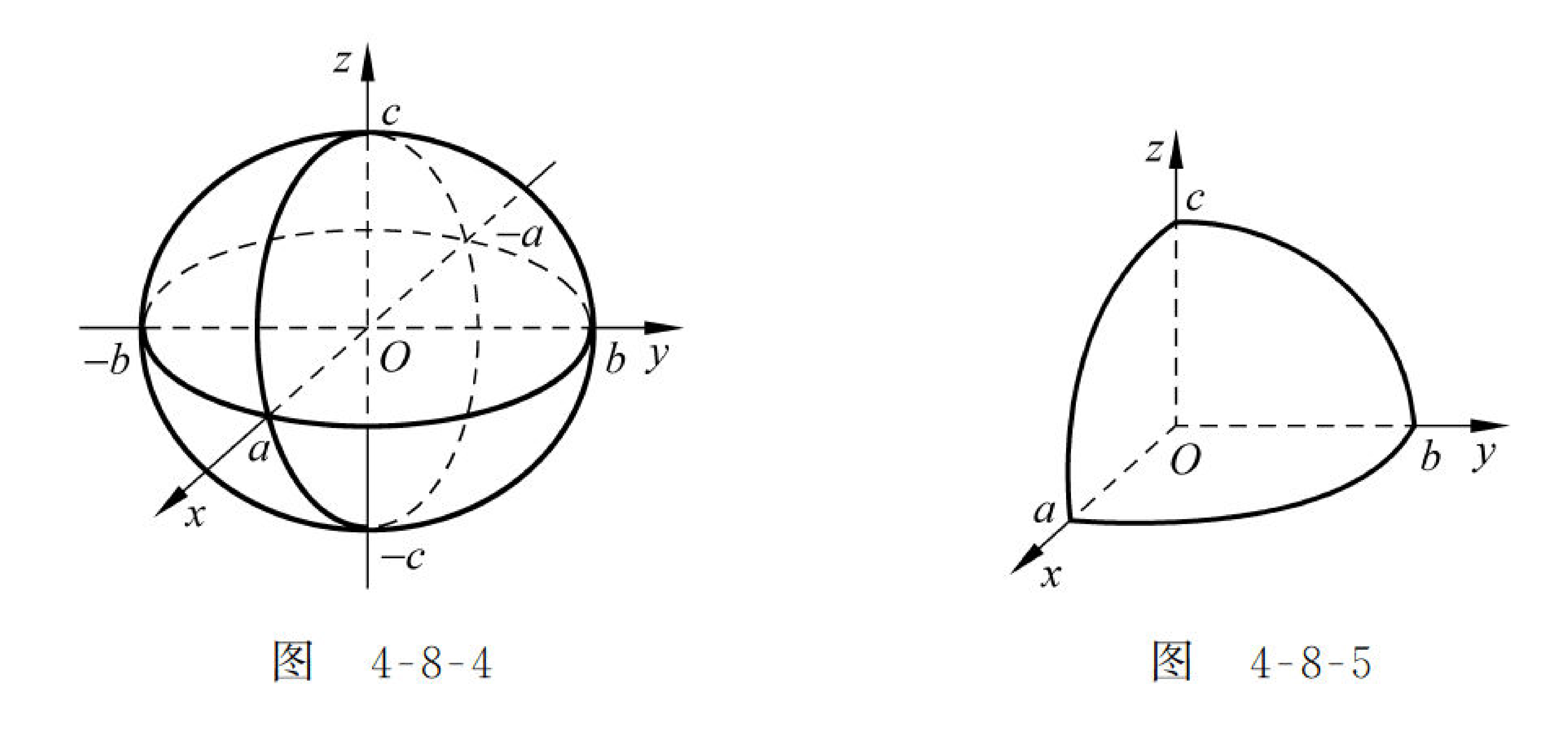


图 4-8-4　　图 4-8-5

当与坐标面的交线不能构成框图时,再用下面的规定.

(2) 由与平行于坐标面的交线给出

例 4.8.2 绘制

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

的图形.

解　1°　与坐标面的交线.

与坐标面 xOz 的交线为

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

即 $z=\dfrac{x^2}{a^2}$. 同理得与坐标面 yOz 的交线为 $z=\dfrac{y^2}{b^2}$(参见图 4-8-6).

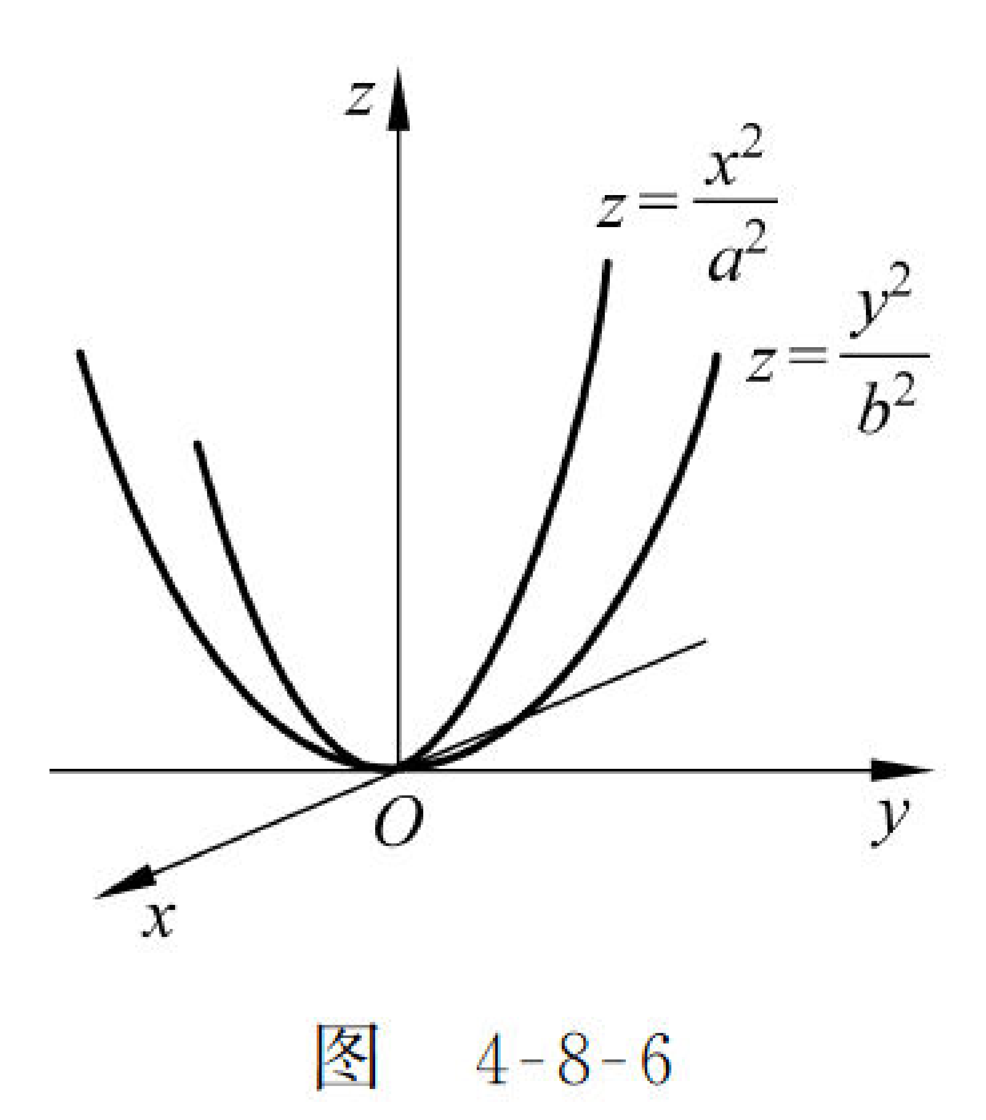


图　4-8-6

2°　与平行于坐标面的平面的交线. 与坐标面的平面 $z=1$ 的交线为

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, \\ z = 1, \end{cases}$$

即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3°　将不可见线绘为虚线即得成图(参见图 4-8-7). 简图如图 4-8-8 所示.

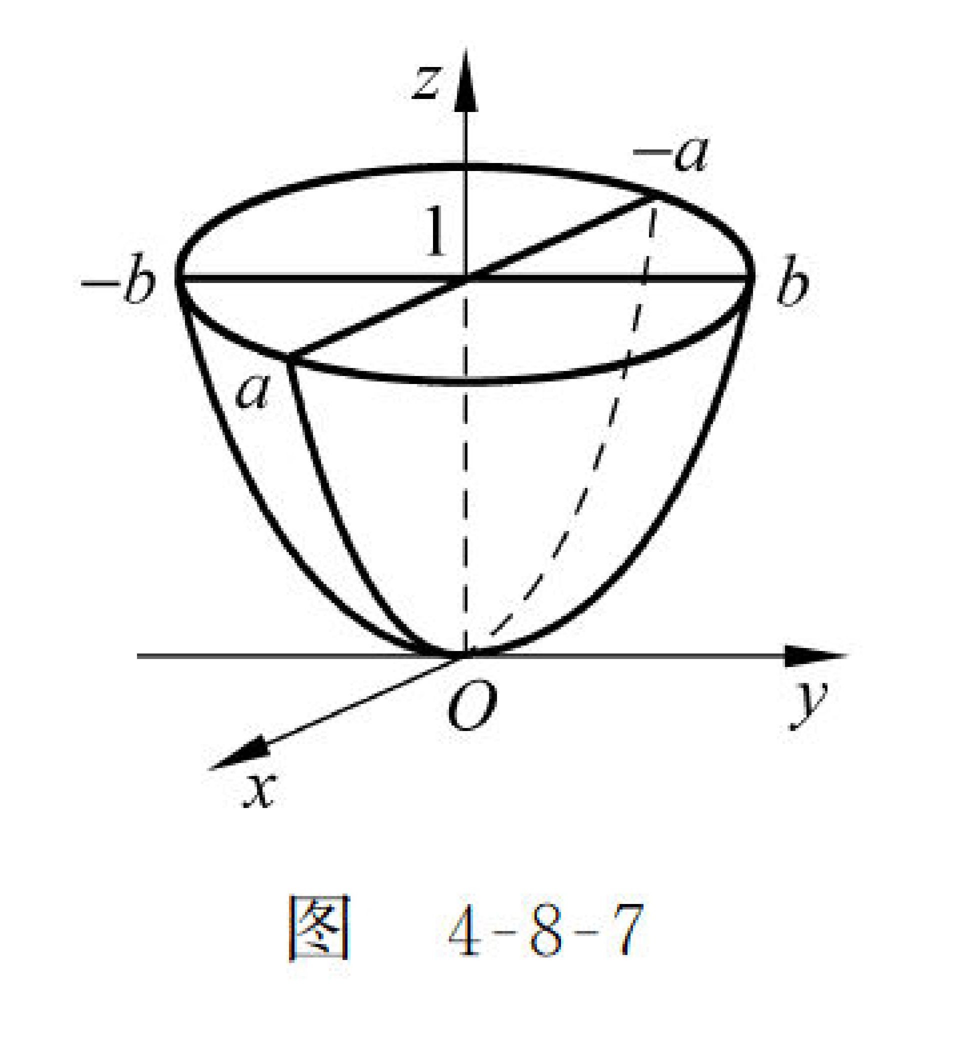


图　4-8-7

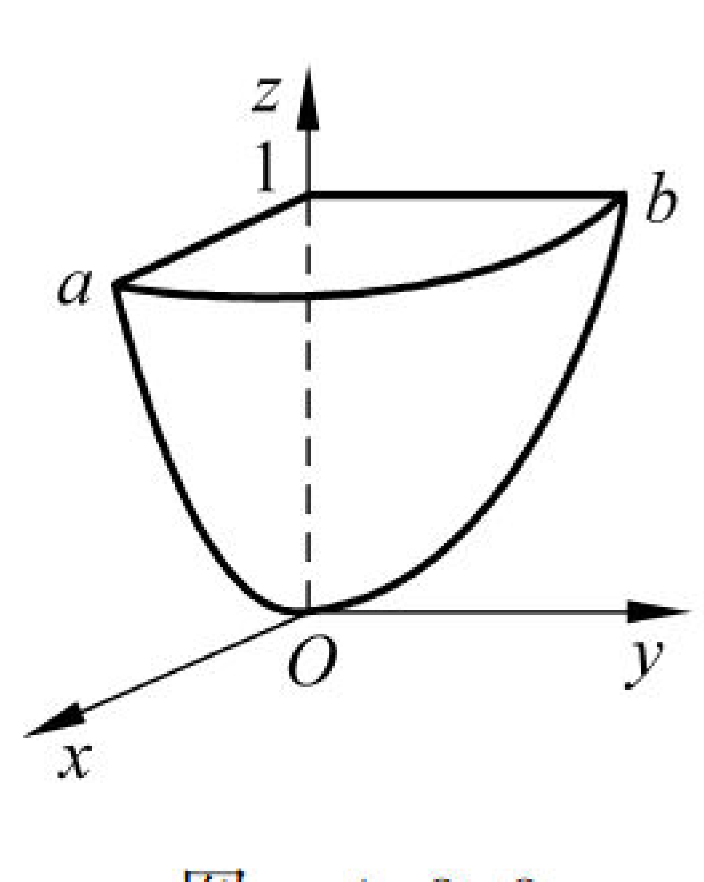


图　4-8-8

当前面两种方法得到的曲线不能构成框图时,再用下面的规定.

(3) 由与垂直于坐标面的交线给出

例 4.8.3　绘制柱面 $y=x^2$ 的图形.

解 1° 与坐标面的交线.

与坐标面 xOy 的交线为 $y=x^2$.

2° 与平行于坐标面的平面的交线.

与坐标面的平面 $z=1$ 的交线为

$$\begin{cases} y = x^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

3° 添加垂线即得成图(参见图 4-8-9).

当前面前三种方法得到的曲线不能构成框图时,再用下面的规定.

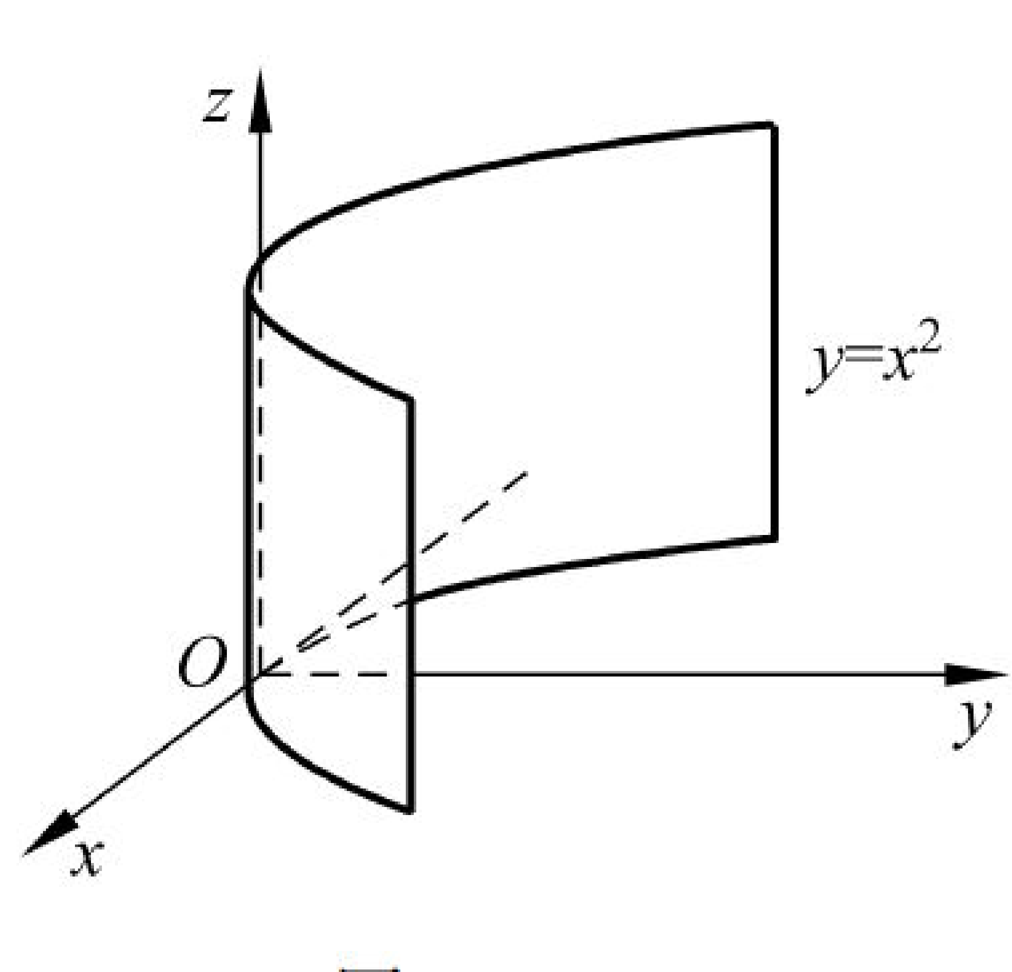


图 4-8-9

(4) 由任意曲线给出

例 4.8.4 绘制双曲抛物面 $z=xy$ 的图形.

解 1° 与坐标面的交线.

与坐标面 xOy 的交线为

$$\begin{cases} z = xy, \\ z = 0, \end{cases}$$

即 x 轴与 y 轴.

2° 与平行于坐标面的平面的交线.

与平行于坐标面的平面 $z=1$ 的交线为

$$\begin{cases} z = xy, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{即} \quad xy = 1.$$

与坐标面的平面 $z=-1$ 的交线为

$$\begin{cases} z = xy, \\ z =-1, \end{cases}$$

即 $xy=-1$(参见图 4-8-10).

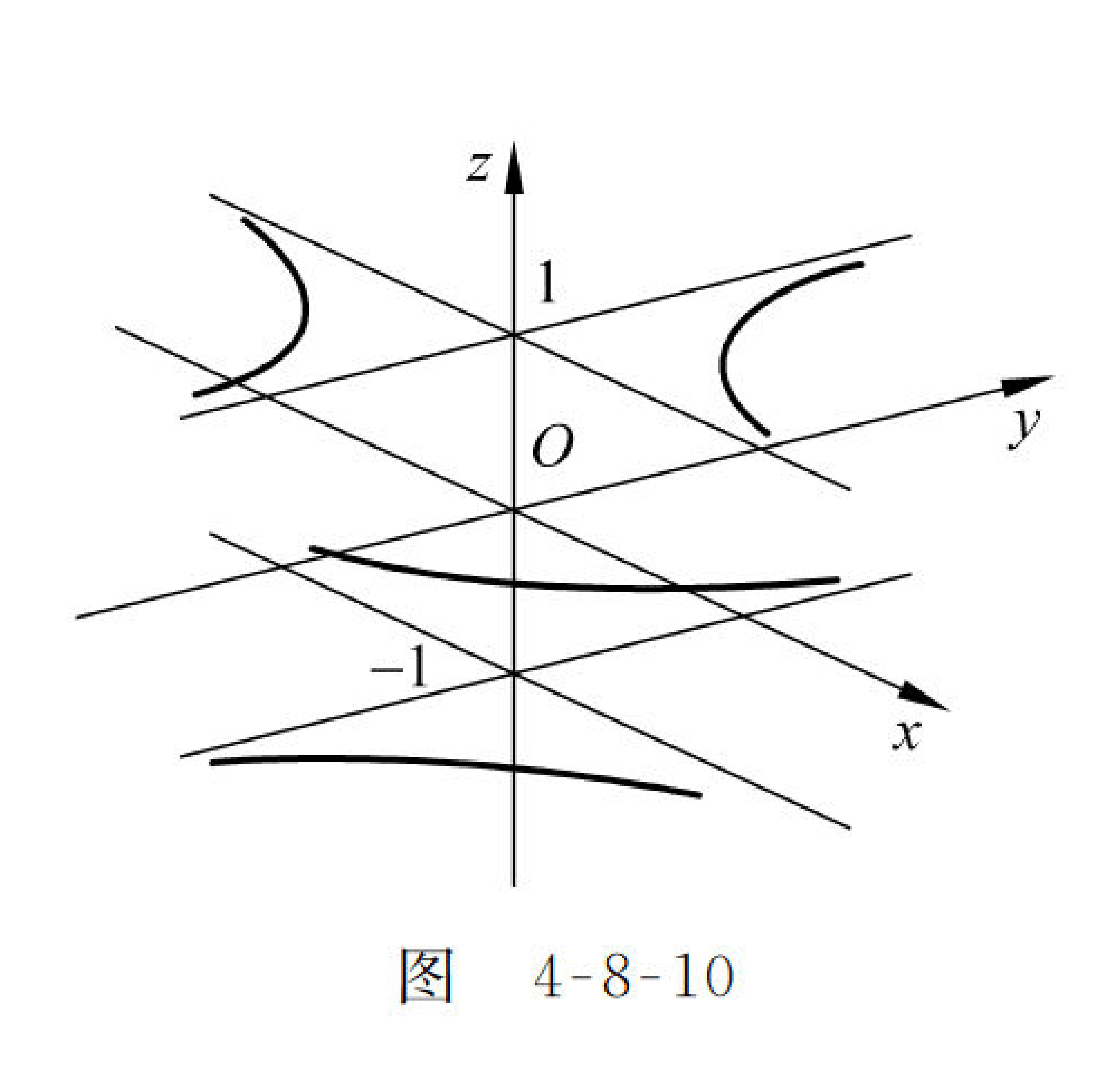


图 4-8-10

3° 与垂直于坐标面的平面的交线.

与垂面 $x=y$ 的交线为

$$\begin{cases} z = xy, \\ x = y, \end{cases}$$

即 $z=x^2$.

与垂面 $x=y$ 的交线为

$$\begin{cases} z = xy, \\ x = -y, \end{cases}$$

即 $z=-x^2$(参见图 4-8-11).

4° 用任意曲线连接而得成图(参见图 4-8-12).

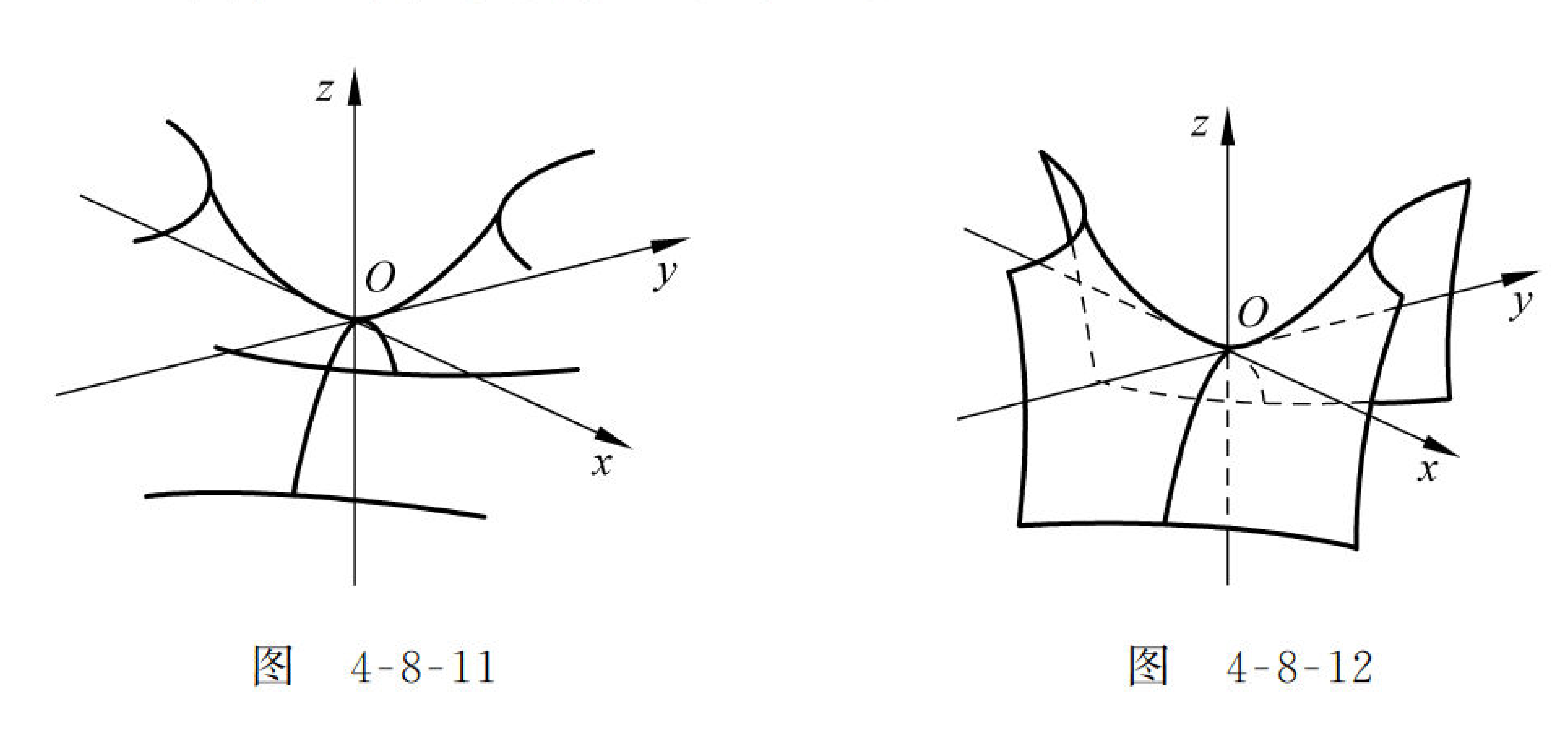


图 4-8-11　　　　图 4-8-12

4. 特殊技巧

(1) 利用辅助线

例 4.8.5 绘制平面

$$z = 2x + 5y$$

的图形.

解 与坐标面 xOz 的交线为$\begin{cases} z=2x+5y, \\ y=0, \end{cases}$即 $z=2x$. 与坐标面 yOz 的交线为$\begin{cases} z=2x+5y, \\ x=0, \end{cases}$即 $z=5y$.

利用坐标面上的直线给出定位而得成图,如图 4-8-13 所示.

(2) 利用辅助面

例 4.8.6 绘制螺旋面

$$S:\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v, \quad (u,v)\in D,\\ z=v,\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}0\leqslant u\leqslant a,\\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

的图形.

解 利用柱面 $x^2+y^2=a^2$ 来体现,如图 4-8-14 所示.

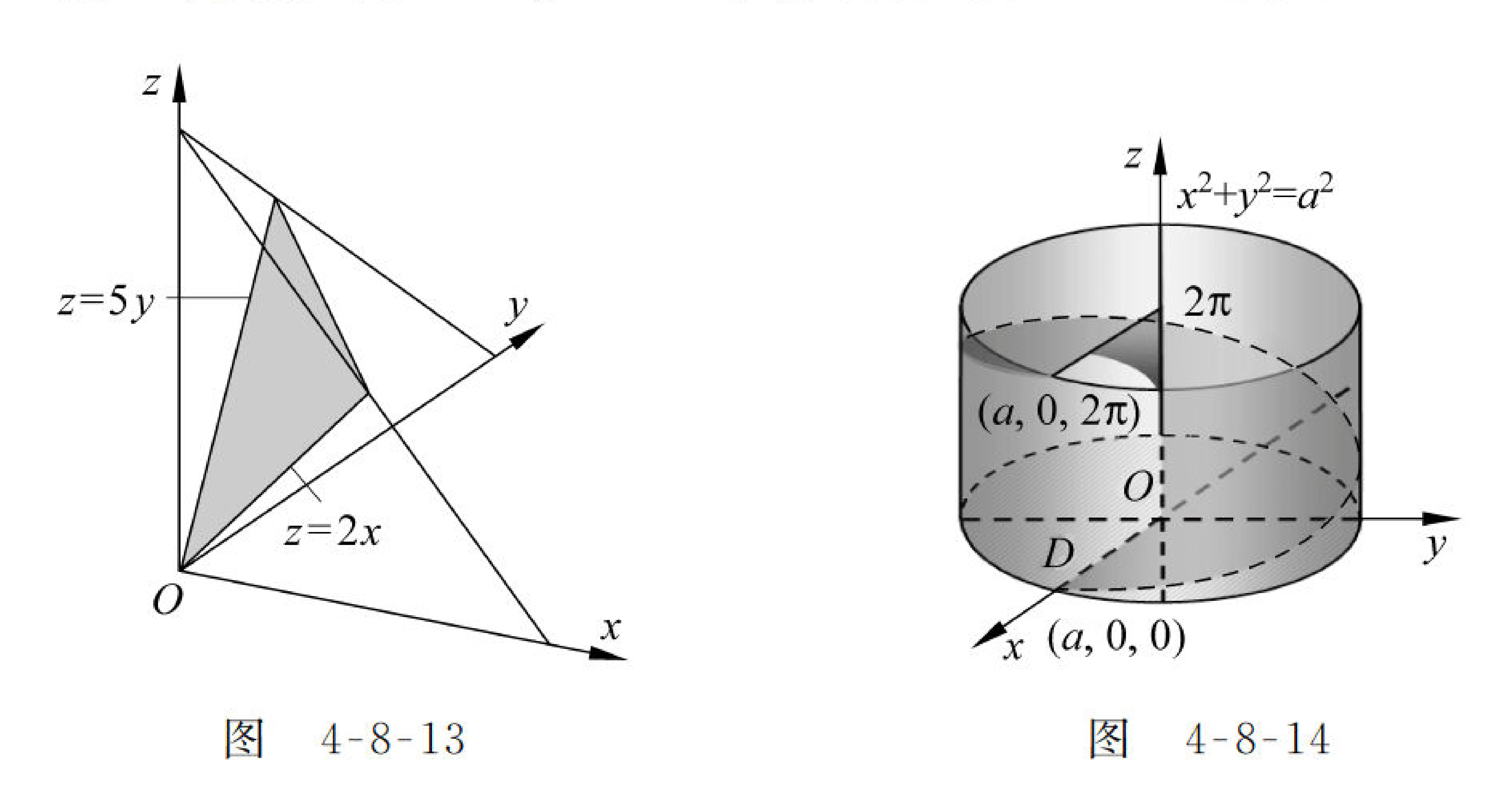


图 4-8-13　　图 4-8-14

(3) 利用投影

例 4.8.7 绘制由 $xyz=2$ 及 $x=1, y=1, z=1$ 所围成的空间几何体.

解 利用其在 xOy 平面上的投影来体现即可,如图 4-8-15 所示.

例 4.8.8 绘制由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围的空间几何体.

解 利用其在 xOy 平面上的投影来体现即可,如图 4-8-16 所示.

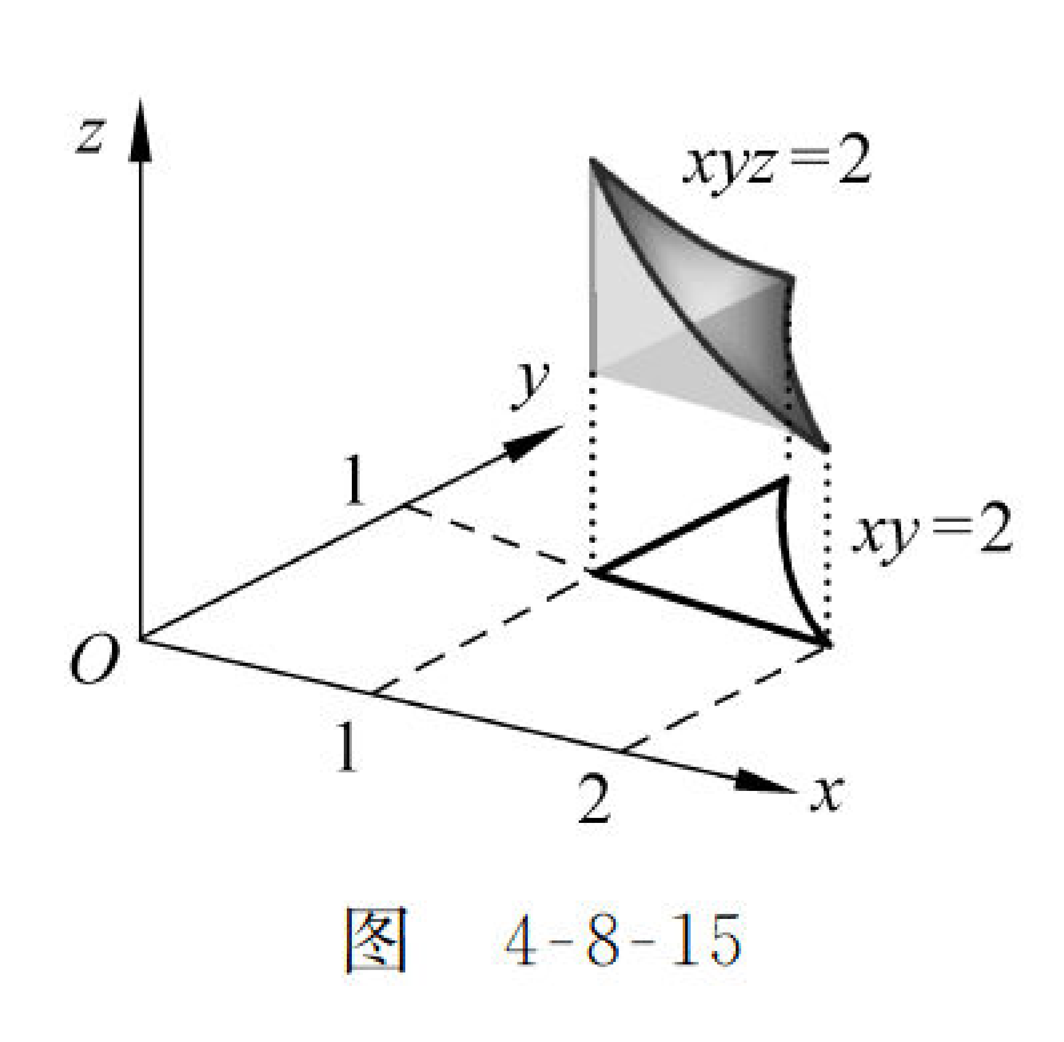


图 4-8-15

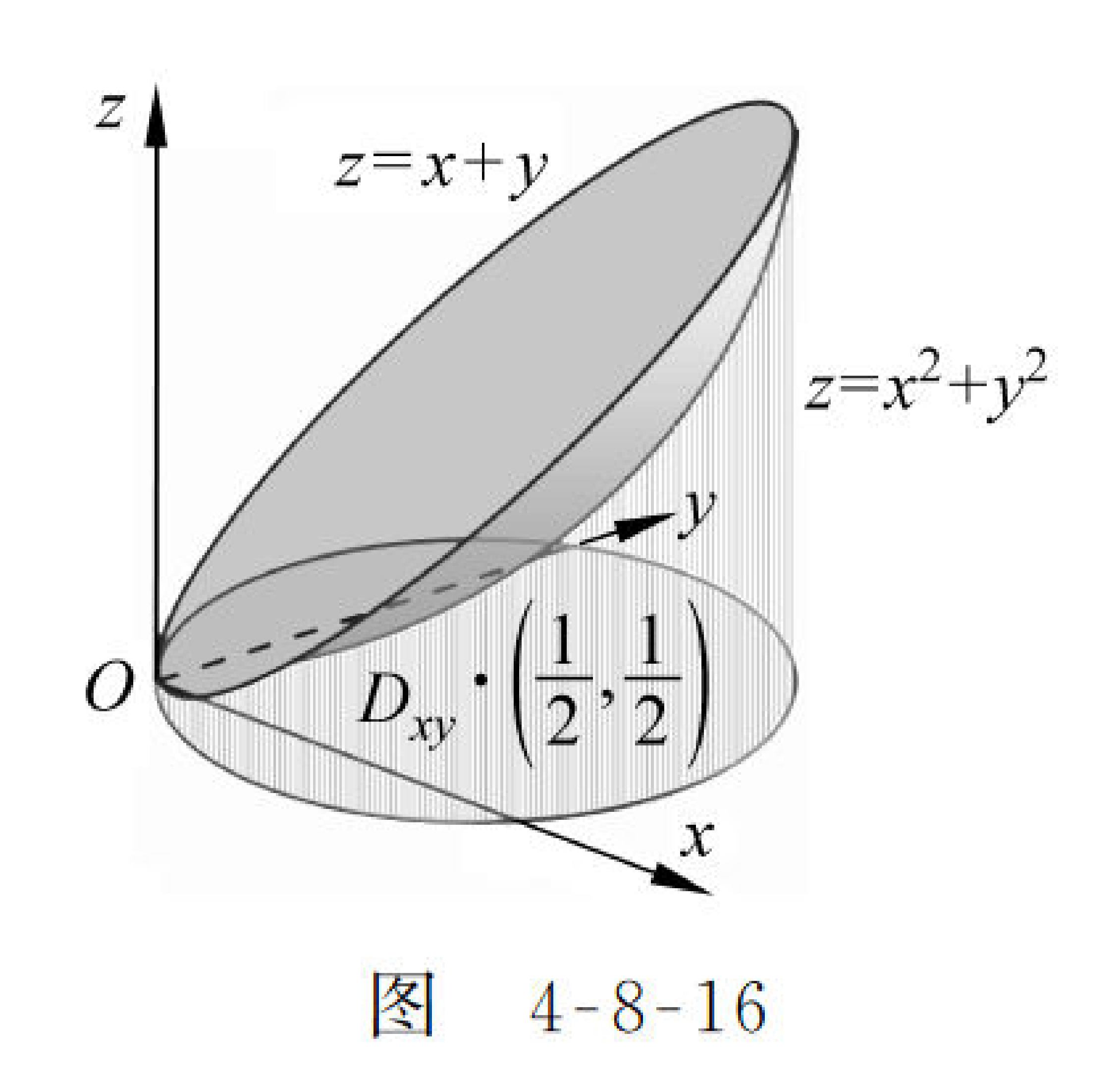


图 4-8-16

(4) 利用剖面

例 4.8.9 绘制由曲面

$$z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \quad 与 \quad 2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$$

所围的立体.

解 利用与坐标面相截的截口面表示,如图 4-8-17 所示.

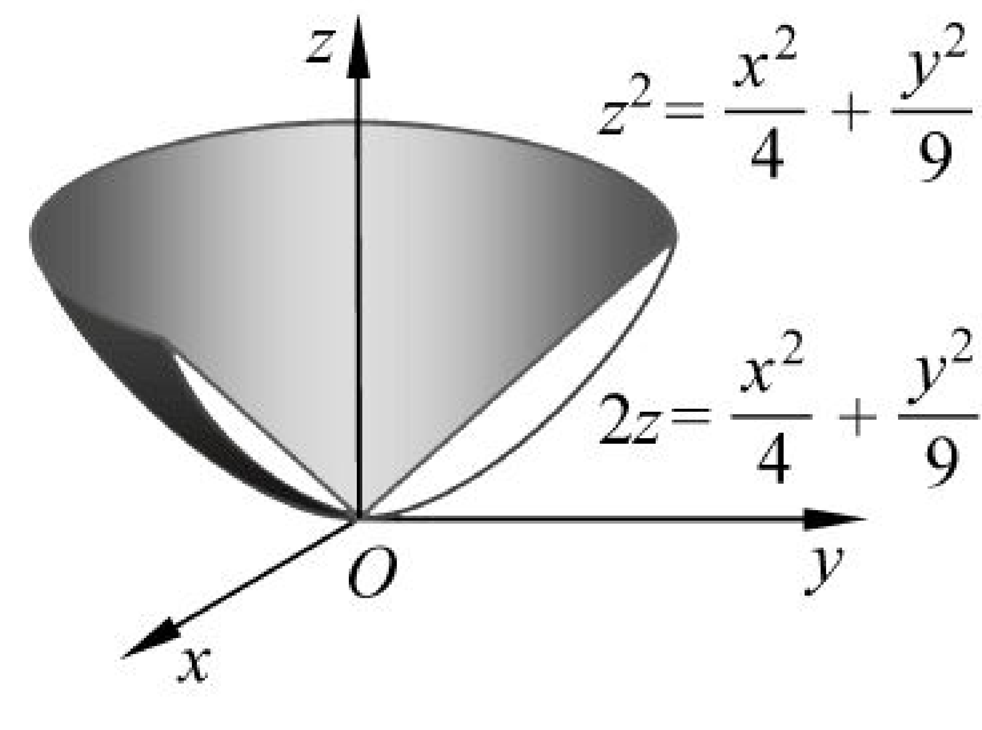


图 4-8-17

5. 图例

例 4.8.10 由 $z=x^2+y^2$, $z=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 所围成的曲顶柱体,选择观察者在第四卦限的处理,即得图 4-8-18.

例 4.8.11 由 $z=0$, $z=xy$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$ 所围成的曲顶柱体,同样选择观察者在第四卦限的处理,即得图 4-8-19.

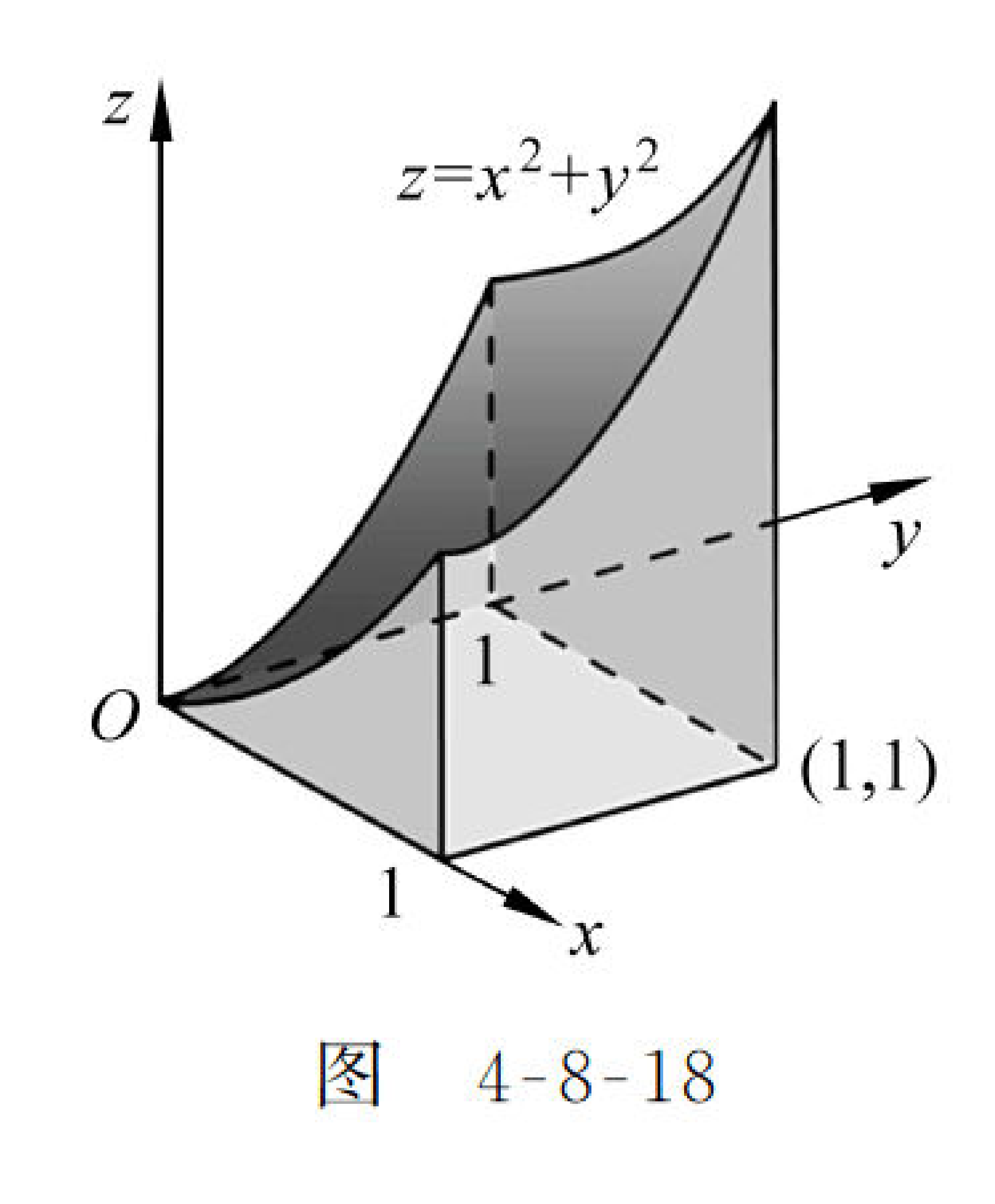


图 4-8-18

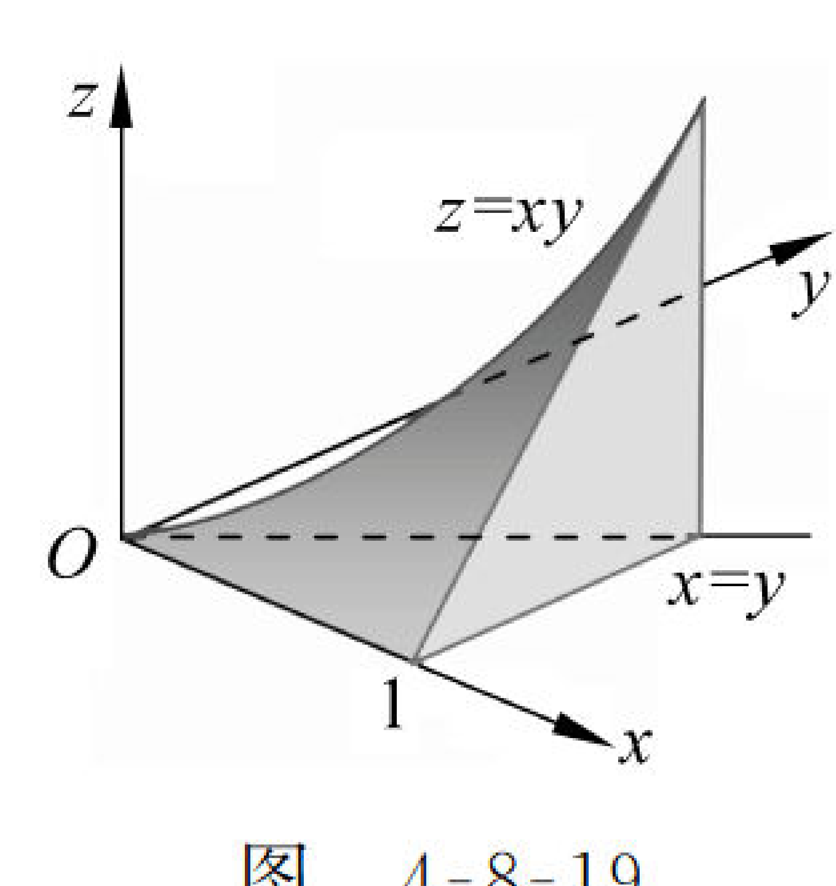


图 4-8-19

不断提高制图与识图的能力，就可以培养与发展一个人的空间想象能力.有了这个能力，对函数的认识就会上升一个档次.

习 题 4.8

1. 画出下列方程的图形：

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$；　　(2) $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ z=2; \end{cases}$

(3) $z=xy$.

2. 画出下列曲面所围空间几何体的图形：

(1) $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$；

(2) $x=0, y=0, z=0, z=x^2+y^2, x+y=1$；

(3) $x=\sqrt{y-z^2}, 2x=\sqrt{y}, y=1$.

第 5 章

二次曲线的一般理论

前面我们讨论了向量的相关知识，以及轨迹与方程，平面与空间直线，柱面、锥面、旋转面等常见曲面. 在轨迹与方程中，我们研究现实生活中一些特殊平面曲线，如以前学习过的平面曲线中的圆锥曲线有椭圆、双曲线、抛物线，对于它们的相关知识大家非常的熟悉，问题是否还有其他的二次曲线呢? 如果有，它们的性质又与圆锥曲线有何关系呢? 本章我们主要对二次曲线进行一般的讨论，让大家对二次曲线有一个较为完整和全面的认识和了解.

5.1　二次曲线的基本概念

1. 二次曲线的基本概念

在平面上取定了直角坐标系之后，平面上的点就与有序数组 (x, y) 建立了一一对应的关系. 在此基础上，我们就可以进一步把研究平面曲线的几何问题，归结为其方程的代数问题，从而为“用代数的方法研究平面曲线”创造了条件.

我们把建立了直角标架的平面叫做**欧氏平面**，记作$\mathbb{R}^2$. 对于欧氏平面从数学角度的确切定义，以后的学习中会给出.

定义 5.1.1　在$\mathbb{R}^2$上，由二元二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

给出的曲线 L 称为**欧氏平面上的二次曲线**,而此方程称为二次曲线 L 的方程.

在二次曲线 L 的方程中,系数 a_{ij} 为实数,且 a_{11},a_{12},a_{22} 至少有一个不为零,而 xy,x,y 项的系数带有 2 是为了计算方便,即在这种表示下,利用矩阵的乘法运算可将二次曲线的方程表示为

$$L:(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

并称行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为二次曲线 L 的**系数行列式**. 如果 $D\neq 0$,则称此时的二次曲线 L 为**非退化**的,否则称 L 为**退化**的.

在这一章里,我们将讨论二次曲线的几何性质及其方程的化简,最后讨论其分类. 在讨论中,主要将从研究直线与二次曲线的位置关系入手,来认识二次曲线的某些几何性质. 为了求出直线与二次曲线的交点,就必须涉及解二次方程组的问题,但是二次方程组的根可能是虚数,因此,在这里我们将像代数中引进虚数把实数扩充成复数那样,在平面上引进虚元素. 下面简单介绍一下有关虚元素的问题.

我们知道,当平面上建立了笛卡儿坐标系后,有序实数对 (x,y) 就表示平面上的一个点,如果 x 及 y 中至少有一个是虚数时,我们仍然认为有序数对 (x,y) 仍表示平面上的一个点,这样的点我们把它叫做平面上的**虚点**,而有序数对 (x,y) 叫做这个虚点的坐标,相应地我们把坐标是一对实数的点叫做平面上的一个**实点**. 如果两个虚点的对应坐标都是共轭复数,那么这两点叫做一对**共轭虚点**,实点与虚点统称为**复点**.

当平面上引进了虚点之后,我们仍然可以讨论向量、直线等概念. 例如:设 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 为平面上的两个复点,那么我

们称(x_2-x_1,y_2-y_1)为以 P_1 为起点，P_2 为终点的**复向量**，并记为$\overrightarrow{P_1P_2}$，如果 x_2-x_1 与 y_2-y_1 中至少有一个是虚数时，我们就把它叫做**虚向量**. 如果点 $P(x,y)$ 的坐标满足表达式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

其中 λ 是复数，我们就称点 P 分线段 P_1P_2 成定比 λ，我们把点 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$叫做线段 P_1P_2 的中点. 又把

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}$$

叫做由两点 $P_1(x_1,y_1)$与 $P_2(x_2,y_2)$决定的直线的参数方程，其中 t 是参数，它可以为任意的复数. 消去参数 t 得

$$Ax+By+C=0,$$

其中 $A=y_2-y_1$，$B=-(x_2-x_1)$，$C=y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)$.

方程 $Ax+By+C=0$ 叫做直线的一般式方程，如果 A,B,C 与三个实数成比例，那么直线是**实直线**，否则叫做**虚直线**.

必须指出，由于共轭复数的和是实数，所以联结两个共轭虚点的线段的中点是实点.

平面上引进了虚点后，二次曲线的方程中可能会出现虚系数，不过我们在本书中讨论问题时，为了方便，就只考虑实系数的二次曲线方程. 但是，由于引进了虚数，实系数方程所表示的曲线上也将含有很多虚点，甚至有的实系数方程所表示的二次曲线上全部都是虚点而没有实点.

为了方便起见，我们引进下面的一些记号：

$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$；

$F_1(x,y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$；

$F_2(x,y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}$；

$F_3(x,y)\equiv a_{13}x+a_{23}y+a_{33}$；

$\Phi(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$.

这样我们容易验证下面的恒等式成立

$$F(x,y) \equiv xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_3(x,y),$$

从而二次曲线 L 的方程就可以写成

$$F(x,y) \equiv xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_3(x,y) = 0.$$

由于 $F(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$,所以矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

称为二次曲线 L 的矩阵(或称 $F(x,y)$ 的矩阵). 又

$$\Phi(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

所以矩阵 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ 叫做 $\Phi(x,y)$ 的矩阵. 且记

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. 二次曲线与直线的相关位置

现在我们来讨论二次曲线

$$L: F(x,y) = 0$$

与过点 (x_0,y_0) 且方向向量为 $\vec{v}=(m,n)$ 的直线

$$l: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

的交点.

把直线 l 的方程代入二次曲线 L 的方程中,经过整理后得到关于 t 的方程

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

其中

$$A = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2,$$

$$B = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})m + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})n,$$

$$C = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

利用前面的记号,上式可写为

$$A = \Phi(m,n), \quad B = F_1(x_0,y_0)m + F_2(x_0,y_0)n,$$

$$C = F(x_0,y_0).$$

定义 5.1.2 方程 $At^2+2Bt+C=0$ 称为曲线 L 与直线 l 的**位置方程**.

由位置方程,显然有下面的结论.

(1) $A\neq 0$

① 当 $\Delta=B^2-AC>0$ 时,方程有两个不相等的实根 t_1 与 t_2,从而得到直线 l 与二次曲线 L 有两个不同的实交点;

② 当 $\Delta=B^2-AC=0$ 时,方程有两个相等的实根 t_1 与 t_2,这时直线 l 与二次曲线 L 有两个重合的实交点;

③ 当 $\Delta=B^2-AC<0$ 时,方程有两个共轭的虚根,这时直线 l 与二次曲线 L 交于两个共轭的虚点.

(2) $A=0$

① 当 $B\neq 0$ 时,方程是关于 t 的一次方程,它有唯一的一个实根,所以直线 l 与二次曲线 L 有唯一的实交点;

② 当 $B=0$,而 $C\neq 0$ 时,方程为矛盾方程,从而无解,所以直线 l 与二次曲线 L 没有交点;

③ 当 $B=0$,且 $C=0$ 时,方程是一个恒等式,它能被任何值的 t 所满足,所以直线 l 上的一切点都在二次曲线 L 上,即直线 l 全部在二次曲线 L 上.

由直线 l 与二次曲线 L 相交的情况,我们给出下面的定义.

定义 5.1.3 如果直线 l 与二次曲线 L 有两个交点,则称直线 l 为二次曲线 L 的**割线**;如果直线 l 与二次曲线 L 有两个相同的交点,则称直线 l 为二次曲线 L 的**切线**;如果直线 l 与二次曲线 L 只在

无穷远处相交,则称直线 l 为二次曲线 L 的**渐近线**.

因为 $t\to\infty\Leftrightarrow\frac{1}{t}\to 0$,令 $s=\frac{1}{t}$,由方程 $At^2+2Bt+C=0$ 得

$$Cs^2+2Bs+A=0,$$

从而方程 $Cs^2+2Bs+A=0$ 有零根的意义是直线 l 与二次曲线 L 在无穷远处相交,于是有下面的结论.

定理 5.1.1 直线 l 为曲线 L 的渐近线 $\Leftrightarrow Cs^2+2Bs+A=0$ 有两个相同的零根.

综上可得:

$$A\neq 0,\begin{cases}\Delta>0\text{ 时},l\text{ 是 }L\text{ 的割线};\\ \Delta=0\text{ 时},l\text{ 是 }L\text{ 的切线};\\ \Delta<0\text{ 时},l\text{ 与 }L\text{ 交于一对虚点}.\end{cases}$$

$$A=0,\begin{cases}B\neq 0\text{ 时},l\text{ 与 }L\text{ 有一个实交点和一个无穷远交点};\\ B=0,C\neq 0\text{ 时},l\text{ 与 }L\text{ 无交点};\\ B=0,C=0\text{ 时},l\subset L.\end{cases}$$

例 5.1.1 讨论抛物线 $y^2=2px$ 与对称轴 $y=0$ 的关系.

解 因为 x 轴的方向 $\vec{v}=(m,n)=(1,0)$,参数方程为

$$\begin{cases}x=t,\\ y=0,\end{cases}$$

代入方程 $y^2=2px$ 中得位置方程 $t=0$,因为 $A=0,B=1\neq 0$,于是 x 轴与抛物线 $y^2=2px$ 有一个交点 $(0,0)$,且有一个无穷远交点.

例 5.1.2 讨论抛物线 $y^2=2px$ 与 y 轴的关系.

解 因为 y 轴的方向 $\vec{v}=(m,n)=(0,1)$,参数方程为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=t,\end{cases}$$

代入方程 $y^2=2px$ 中得 $t^2=0$,于是 y 轴与抛物线 $y^2=2px$ 有两个相同交点 $(0,0)$,故 y 轴是抛物线 $y^2=2px$ 的切线.

习 题 5.1

1. 写出下列二次曲线的 $F_1(x,y)$，$F_2(x,y)$，$F_3(x,y)$ 以及矩阵$\boldsymbol{A}$：

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(2) $x^2-3y^2+5x+2=0$；

(3) $y^2=2px$；

(4) $2x^2-xy+y^2-6x+7y-4=0$.

2. 指出二次曲线 $x^2-2xy-3y^2+6x-2y+5=0$ 与下列直线的位置关系：

(1) $\begin{cases}x=1-t,\\y=2t;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=1+3t,\\y=2+2t;\end{cases}$

(3) $x-2y+2=0$；　　(4) $x+y+2=0$.

5.2 二次曲线的切线

定义 5.2.1 二次曲线 L 与切线 l 相交的点称为**切点**. 如果直线全部在二次曲线上，我们也把它叫做该二次曲线的切线，直线上的每一个点都可以看作切点.

由 5.1 节的讨论知，直线 l 与二次曲线 L 相切的充分必要条件是 $A\neq0$，$B^2-AC=0$ 或 $A=B=C=0$.

下面，我们分两种情况讨论.

(1) $P_0(x_0,y_0)$在二次曲线 L 上，求二次曲线 L 过点 P_0 的切线方程.

如果点 $P_0(x_0,y_0)$在二次曲线 L 上，则 $C\equiv F(x_0,y_0)=0$，于是 $B=0$，即 $F_1(x_0,y_0)m+F_2(x_0,y_0)n=0$，所以

$$(F_1(x_0,y_0),F_2(x_0,y_0))\perp(m,n).$$

如果 $F_1(x_0,y_0)$,$F_2(x_0,y_0)$不全为零,则二次曲线 L 在点 $P_0(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$F_1(x_0,y_0)(x-x_0)+F_2(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

参数式方程为

$$\begin{cases}x=x_0+F_2(x_0,y_0)t,\\ y=y_0-F_1(x_0,y_0)t.\end{cases}$$

如果 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$,那么

$$F_1(x_0,y_0)m+F_2(x_0,y_0)n=0$$

变为恒等式,切线的方向(m,n)不能唯一地被确定,从而切线不确定,这时通过点(x_0,y_0)的任何直线都和二次曲线 L 相交于相互重合的两点,我们把这样的直线也看成是二次曲线 L 的切线.

定义 5.2.2 二次曲线 L 上满足条件

$$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$$

的点(x_0,y_0)叫做该二次曲线的**奇异点**,简称**奇点**;二次曲线的非奇异点叫做二次曲线的**正常点**.

这样我们就得到了下面的定理.

定理 5.2.1 如果点(x_0,y_0)是二次曲线 L 的正常点,那么通过点(x_0,y_0)的切线方程是

$$\begin{cases}x=x_0+F_2(x_0,y_0)t,\\ y=y_0-F_1(x_0,y_0)t,\end{cases}$$

而点(x_0,y_0)是它的切点.如果点(x_0,y_0)是二次曲线 L 的奇异点,那么通过点(x_0,y_0)的切线不确定,或者说通过点(x_0,y_0)的每一条直线都是二次曲线 L 的切线.

推论 如果点(x_0,y_0)是二次曲线 L 的正常点,那么通过点(x_0,y_0)的切线方程是

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y$$
$$+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0.$$

证 把方程$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0$ 改写为

$$xF_1(x_0,y_0)+yF_2(x_0,y_0)-[x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)]=0,$$

由于 $x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)+F_3(x_0,y_0)=0$,故

$$xF_1(x_0,y_0)+yF_2(x_0,y_0)+F_3(x_0,y_0)=0,$$

即

$$x(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})+y(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})$$
$$+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33})=0,$$

化简整理得

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y$$
$$+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0.$$

故结论成立.

例 5.2.1　求二次曲线 $x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 通过点(2,1)的切线方程.

解　方法一　因为 $F(2,1)=2^2-2\times1+1^2+2\times2-4\times1-3=0$,且

$$F_1(x,y)\big|_{(2,1)}=\left[x-\frac{y}{2}+1\right]\Big|_{(2,1)}=\frac{5}{2}\neq0,$$

$$F_2(x,y)\big|_{(2,1)}=\left[-\frac{x}{2}+y-2\right]\Big|_{(2,1)}=-2\neq0,$$

所以点(2,1)是二次曲线上的正常点,因此通过点(2,1)的切线方程为 $\frac{5}{2}(x-2)-2(y-1)=0$,即 $5x-4y-6=0$ 为所求.

方法二　因为点(2,1)是曲线上的正常点,所以由公式

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y$$
$$+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0$$

知切线方程为

$$2x-\frac{1}{2}(x+2y)+y+(x+2)-2(y+1)-3=0,$$

即 $5x-4y-6=0$ 为所求.

(2) $P_0(x_0,y_0)$不在二次曲线 L 上,求二次曲线 L 过点 P_0 的切线方程.

此时 $C\neq0$,但 $B^2-AC=0$. 设切线的方向向量为 $\vec{v}=(m,n)$,则

切线方程为$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$代入曲线 L 的方程中,由 $B^2-AC=0$ 得到 $m:n$,即可得到曲线 L 的切线方程.

例 5.2.2 求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点(0,2)的切线方程.

解 方法一 因为切线过点(0,2),所以设切线的方程为

$$\begin{cases} x = mt, \\ y = 2+nt, \end{cases}$$

其中 t 为参数,而

$$A = m^2-2mn+n^2, \quad B=-m+2n, \quad C=F(0,2)=3,$$

所以由 $B^2-AC=0$ 得

$$(-m+2n)^2-3(m^2-mn+n^2)=0,$$

化简得 $2m^2+mn-n^2=0$,从而有 $(2m-n)(m+n)=0$,即

$$m:n=1:2 \quad 或 \quad m:n=1:-1,$$

所以 $2x-y+2=0$ 或 $x+y-2=0$ 为所求.

方法二 设切线的方向向量为 $\vec{v}=(m,n)$,在切线上取动点 (x,y),由于切线经点(0,2),所以 $m:n=x:y-2$,即

$$\begin{cases} m = xk, \\ n = (y-2)k, \end{cases}$$

其中 k 为参数.而由 $B^2-AC=0$ 得 $(2m-n)(m+n)=0$,即

$$(2x-y+2)(x+y-2)=0,$$

所以 $2x-y+2=0$ 或 $x+y-2=0$ 为所求.

方法三 设过点(0,2)的切线与已知二次曲线相切于点 (x_0,y_0),那么切线方程为

$$x_0x-\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)+y_0y-1=0,$$

即

$$\left(x_0-\frac{1}{2}y_0\right)x-\left(\frac{1}{2}x_0-y_0\right)y-1=0.$$

因为它通过点(0,2),所以(0,2)满足上述方程,将代入化简得

$$x_0-2y_0+1=0,$$

另一方面,点(x_0,y_0)在该二次曲线上,所以有

$$x_0^2-x_0y_0+y_0^2-1=0,$$

解联立方程组

$$\begin{cases}x_0-2y_0+1=0,\\ x_0^2-x_0y_0+y_0^2-1=0\end{cases}$$

得切点坐标为

$$\begin{cases}x_0=-1,\\ y_0=0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x_0=1,\\ y_0=1.\end{cases}$$

故所求切线方程为 $2x-y+2=0$ 或 $x+y-2=0$.

习 题 5.2

1. 求下列二次曲线在所给点或经过所给点的切线方程:

(1) 曲线 $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$ 在点(2,1);

(2) 曲线 $x^2+xy+y^2+x+4y+3=0$ 经过点(2,−1).

2. 求下列二次曲线的切线方程,并求出切点的坐标:

(1) 曲线 $x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$ 的切线平行于直线 $x+4y+1=0$;

(2) 曲线 $x^2+xy+y^2-3=0$ 平行于 x 轴的切线.

3. 求下列二次曲线的奇异点:

(1) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$;

(2) $y^2+2xy-2x-1=0$.

4. 求曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 的平行于两坐标轴的切线方程.

5. 试求经过原点且切直线 $3y+4x+2=0$ 于点(1,−2)及切直线 $y-x+1=0$ 于点(0,−1)的二次曲线方程.

5.3 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线

1. 二次曲线的渐近方向

两条直线平行可视为其相交于无穷远处，因而当直线 l 与二次曲线 L 有无穷远交点时，也反映出曲线 L 无限延伸时与直线 l 平行的趋势. 换句话说，二次曲线 L 上的动点 P 沿曲线 L 趋于无穷时，过点 P 的切线方向趋于直线 l 的方向.

我们在前面看到二次曲线 L 与直线 l 当满足条件

$$\Phi(m,n) = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0$$

时，或者只有一个实交点，或者没有交点，或者直线 l 全部在二次曲线 L 上，成为二次曲线的组成部分，由此，我们得到下面的定义.

定义 5.3.1 满足条件 $\Phi(m,n)=0$ 的方向 (m,n) 称为二次曲线 L 的**渐近方向**，否则叫做**非渐近方向**.

例如抛物线 $y^2=2px$ 与对称轴 $y=0$ 有无穷远交点，故抛物线 $y^2=2px$ 的对称轴 $y=0$ 的方向 $(1,0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 的渐近方向，它表明了抛物线 $y^2=2px$ 上的点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿抛物线趋于无穷时，过点 P_0 的切线趋于与对称轴 $y=0$ 平行.

因为二次曲线 L 的二次项系数不能全为零，所以渐近方向 (m,n) 所满足的方程 $\Phi(m,n)=0$ 总有确定的解. 这是因为：

如果 $a_{11}\neq 0$，那么可把方程 $\Phi(m,n)=0$ 改写为

$$a_{11}\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2a_{12}\frac{m}{n} + a_{22} = 0,$$

则可得 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}=\dfrac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{11}}$；

如果 $a_{22}\neq 0$，那么可把方程 $\Phi(m,n)=0$ 改写为

$$a_{22}\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 2a_{12}\frac{n}{m} + a_{11} = 0,$$

由此可得$\frac{n}{m}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{22}}$;

如果 $a_{11}=a_{22}=0$,那么 $a_{12}\neq 0$,这时方程 $\Phi(m,n)=0$ 变为 $2a_{12}mn=0$,所以 $m:n=1:0$ 或 $0:1$,这时

$$I_2=\begin{vmatrix}0 & a_{12}\\ a_{12} & 0\end{vmatrix}=-a_{12}^2<0.$$

从上面讨论我们可以看到,当且仅当 $I_2>0$ 时,二次曲线 L 的渐近方向是一对共轭的虚方向;当 $I_2=0$ 时,二次曲线 L 有一个实渐近方向;当 $I_2<0$ 时,二次曲线 L 有两个实渐近方向.因此二次曲线的渐近方向最多有两个,显然二次曲线的非渐近方向有无数多个.

定义 5.3.2 没有实渐近方向的二次曲线叫做**椭圆型二次曲线**,有一个实渐近方向的二次曲线叫做**抛物型二次曲线**,有两个实渐近方向的二次曲线叫做**双曲型二次曲线**.

因此二次曲线 L 按其渐近方向可以分为 3 种类型,即

(1) 椭圆型二次曲线:$I_2>0$;

(2) 抛物型二次曲线:$I_2=0$;

(3) 双曲型二次曲线:$I_2<0$.

2. 二次曲线的中心与渐近线

对称中心简称为中心,它平分过它的所有弦.由前讨论知,当直线 l 的方向(m,n)是二次曲线 L 的非渐近方向时,即当

$$\Phi(m,n)=a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2\neq 0$$

时,直线 l 与二次曲线 L 总交于两个点(两不同实点,两重合实点或一对共轭虚点),我们把由这两点决定的线段叫做二次曲线的弦.这就得到下面的定义.

定义 5.3.3 如果点 P_0 是二次曲线的通过它的所有弦的中点(因而点 P_0 是二次曲线的对称中心),那么点 P_0 叫做**二次曲线的中心**.

根据这个定义,当点 $P_0(x_0,y_0)$为二次曲线 L 的中心时,那么过

点 $P_0(x_0,y_0)$且以二次曲线 L 的任意非渐近方向(m,n)为方向的直线 l 与二次曲线L 交于两点 P_1,P_2,点 $P_0(x_0,y_0)$就是弦 P_1P_2 的中点. 因此将直线 l 的方程代入二次曲线 L 的方程,得

$$\Phi(m,n)t^2+2[F_1(x_0,y_0)m+F_2(x_0,y_0)n]t+F(x_0,y_0)=0,$$

从而有 $t_1+t_2=0$,即

$$F_1(x_0,y_0)m+F_2(x_0,y_0)n=0.$$

因为(m,n)是任意非渐近方向,所以上式是关于 m,n 的恒等式,从而有

$$F_1(x_0,y_0)=0,\quad F_2(x_0,y_0)=0.$$

反过来,适合上面两式的点(x_0,y_0),显然是二次曲线的中心. 这样我们就得到了下面的定理.

定理 5.3.1 点 $C(x_0,y_0)$是二次曲线 L 中心的充要条件为

$$\begin{cases}F_1(x_0,y_0)\equiv a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0,\\ F_2(x_0,y_0)\equiv a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0.\end{cases}$$

推论 坐标原点是二次曲线中心的充要条件为二次曲线方程里不含 x 与 y 的一次项.

由于二次曲线 L 的中心坐标由它的**中心方程组**

$$\begin{cases}F_1(x,y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ F_2(x,y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0\end{cases}$$

决定,所以如果

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么中心方程组有唯一解,这时二次曲线 L 将有唯一中心,且中心的坐标就是中心方程组的解. 如果

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=0,\quad 即\quad \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

那么当$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$时,中心方程组无解,故二次曲线 L 没有中心;

而当$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$时，中心方程组有无数多解，这时直线 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$（或 $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$）上的所有点都是二次曲线 L 的中心，这条直线叫做二次曲线 L 的**中心直线**.

定义 5.3.4 有唯一中心的二次曲线叫做**中心二次曲线**，没有中心的二次曲线叫做**无心二次曲线**，有一条中心直线的二次曲线叫做**线心二次曲线**，无心二次曲线与线心二次曲线统称为**非中心二次曲线**.

根据这个定义，我们可得二次曲线 L 按其中心的分类为：

（1）中心二次曲线：$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$；

（2）非中心二次曲线：$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=0$，即$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$：

① 无心二次曲线：$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$；

② 线心二次曲线：$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$.

从二次曲线的按渐近方向与按中心的两种初步分类中，容易看出，椭圆型二次曲线与双曲型二次曲线都是中心二次曲线，而抛物型二次曲线是非中心二次曲线，它包括无心二次曲线与线心二次曲线.

定义 5.3.5 通过二次曲线的中心，而且以渐近方向为方向的直线叫做该二次曲线的**渐近线**.

显然，椭圆型二次曲线只有两条虚渐近线而无实渐近线，双曲型二次曲线有两条实渐近线，而抛物型二次曲线中的无心曲线无渐近线，至于线心二次曲线它有一条实渐近线，就是它的中心直线.

定理 5.3.2 二次曲线的渐近线与该二次曲线或者没有交点，或者整条直线在该二次曲线上，成为二次曲线的组成部分.

证 设直线 l 是二次曲线 L 的渐近线，这里点(x_0,y_0)为二次曲线的中心，(m,n)为二次曲线的渐近方向，则有

$$F_1(x_0,y_0)=0,\quad F_2(x_0,y_0)=0,\quad \Phi(m,n)=0.$$

因此根据直线 l 与二次曲线 L 相交情况的讨论，我们有：当点 (x_0,y_0) 不在二次曲线 L 上，即 $F(x_0,y_0)\neq 0$ 时，渐近线 l 与二次曲线 L 没有交点；当点 (x_0,y_0) 在二次曲线 L 上，即 $F(x_0,y_0)=0$ 时，渐近线 l 全部在二次曲线 L 上，成为二次曲线的组成部分.

习　题　5.3

1. 求下列二次曲线的渐近方向，并指出该二次曲线是属于何种类型：

(1) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$;

(2) $3x^2+4xy+2y^2-6x-2y+5=0$.

2. 判断下列二次曲线是中心二次曲线，无心二次曲线还是线心二次曲线：

(1) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$;

(2) $2x^2+8x+12y-3=0$.

3. 当 a,b 满足什么条件时，二次曲线

$$x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$$

(1) 有唯一的中心；(2) 没有中心；(3) 有一条中心直线.

4. 求二次曲线 $6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$ 的渐近线方程.

5. 求下列二次曲线的方程：

(1) 以点 $(0,1)$ 为中心，且通过点 $(2,3)$，$(4,2)$ 与 $(-1,-3)$；

(2) 通过点 $(1,1)$，$(2,1)$，$(-1,-2)$ 且以直线 $x+y-1=0$ 为渐近线.

5.4　二次曲线的直径

1. 二次曲线的直径

由已经讨论的直线与二次曲线相交的各种情况知，当直线平行于二次曲线的某一非渐近方向时，这条直线与二次曲线总交于

两点(两不同实的,两重合实的或一对共轭虚的),这两点决定了二次曲线的一条弦. 现在我们来研究二次曲线上一族平行弦的中点轨迹.

定理 5.4.1 二次曲线的一族平行弦的中点轨迹是一条直线.

证 设 $m:n$ 是二次曲线的一个非渐近方向,即 $\Phi(m,n)\neq 0$,而点(x_0,y_0)是平行于方向 $m:n$ 的弦的中点,那么过点(x_0,y_0)的弦所在直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

它与二次曲线 L 的两交点(即弦的两端点)由二次方程

$$\Phi(m,n)t^2 + 2[mF_1(x_0,y_0) + nF_2(x_0,y_0)]t + F(x_0,y_0) = 0$$

的两根 t_1 与 t_2 所决定,因为点(x_0,y_0)为弦的中点,所以有

$$t_1 + t_2 = 0,$$

从而有

$$mF_1(x_0,y_0) + nF_2(x_0,y_0) = 0.$$

这就是说平行于方向 $\vec{v}=(m,n)$ 的弦的中点(x_0,y_0)的坐标满足方程

$$mF_1(x,y) + nF_2(x,y) = 0,$$

即 $m(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+n(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0$,或

$$(a_{11}m + a_{12}n)x + (a_{12}m + a_{22}n)y + a_{13}m + a_{23}n = 0.$$

反过来,如果点(x_0,y_0)满足上述 3 个方程之一,那么方程

$$\Phi(m,n)t^2 + 2[mF_1(x_0,y_0) + nF_2(x_0,y_0)]t + F(x_0,y_0) = 0$$

中将有绝对值相等而符号相反的两个根,点(x_0,y_0)就是具有方向 $m:n$ 的弦的中点,因此,$mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0$ 是一族平行于非渐近方向 $m:n$ 的弦的中点轨迹方程.

方程$(a_{11}m+a_{12}n)x+(a_{12}m+a_{22}n)y+a_{13}m+a_{23}n=0$ 的一次项系数不能全为零,这是因为当

$$a_{11}m + a_{12}n = a_{12}m + a_{22}n = 0$$

时,将有

$$\begin{aligned}\Phi(m,n) &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 \\ &= (a_{11}m + a_{12}n)m + (a_{12}m + a_{22}n)n \\ &= 0,\end{aligned}$$

这与 $m:n$ 是非渐近方向的假设矛盾,所以上述 3 个方程都是一个二元一次方程,它是一条直线,于是定理得到了证明.

定义 5.4.1 二次曲线的平行弦中点的轨迹叫做该二次曲线的**直径**,它所对应的平行弦,叫做共轭于这条直径的**共轭弦**,而直径也叫做共轭于平行弦方向的直径.

推论 如果二次曲线的一族平行弦的斜率为 k,那么共轭于这族平行弦的直径方程是

$$F_1(x,y) + kF_2(x,y) = 0.$$

我们从方程

$$mF_1(x,y) + nF_2(x,y) = 0 \quad \text{或} \quad F_1(x,y) + kF_2(x,y) = 0$$

容易看出,如果

$$\begin{aligned}F_1(x,y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x,y) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0\end{aligned}$$

表示两条不同直线时,则

$$mF_1(x,y) + nF_2(x,y) = 0 \quad \text{或} \quad F_1(x,y) + kF_2(x,y) = 0$$

将构成一直线束,当$\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$时为中心直线束;当$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$时为平行直线束.

如果 $F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ 与 $F_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ 表示同一直线,这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$,那么 $mF_1(x,y) + nF_2(x,y) = 0$或 $F_1(x,y) + kF_2(x,y) = 0$ 只表示一条直线.

如果 $F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ 与 $F_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ 中有一个是矛盾方程,比如 $F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ 中 $a_{11} = a_{12} = 0, a_{13} \neq 0$,这时$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$成立,且

$$mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0 \quad 或 \quad F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0$$

仍表示一平行直线束.

如果 $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$ 与 $F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0$ 中有一为恒等式，比如 $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$ 中 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$，这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 成立且 $mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0$ 或 $F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0$ 只表示一条直线.

因此当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$，即二次曲线为中心二次曲线时，它的全部直径属于一个中心直线束，这个直线束的中心就是二次曲线的中心；当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$，即二次曲线为无心二次曲线时，它的全部直径属于一个平行直线束，它的方向为二次曲线的渐近方向 $m:n=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$；当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$，即二次曲线为线心二次曲线时，二次曲线只有一条直径，它的方程是

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \quad (或\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0),$$

即线心二次曲线的中心直线. 由上讨论我们有下面的结论.

定理 5.4.2 中心二次曲线的直径通过该二次曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于该二次曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径只有一条，就是该二次曲线的中心直线.

例 5.4.1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 直径的方程.

解 记 $F(x,y)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$，则有

$$F_1(x,y)=\frac{x}{a^2}, \quad F_2(x,y)=\frac{y}{b^2}.$$

根据 $mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0$，共轭于非渐近方向 $m:n$ 的直径方程是

$$\frac{m}{a^2}x+\frac{n}{b^2}y=0,$$

显然,直径通过曲线的中心(0,0).

请读者写出双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$直径的方程.

例 5.4.2 求抛物线 $y^2=2px$ 的直径.

解 记 $F(x,y)\equiv y^2-2px=0$,则有

$$F_1(x,y)=-p,\quad F_2(x,y)=y.$$

所以共轭于非渐近方向 $m:n$ 的直径方程为

$$m\cdot(-p)+n\cdot y=0,$$

即 $y=\frac{m}{n}p$,所以抛物线 $y^2=2px$ 的直径平行于它的渐近方向 1∶0.

例 5.4.3 求二次曲线 $F(x,y)\equiv x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$ 的共轭于非渐近方向 $m:n$ 的直径.

解 因为 $F_1(x,y)\equiv x-y+1, F_2(x,y)\equiv -x+y-1$,所以直径方程为 $m(x-y+1)+n(-x+y-1)=0$,即$(m-n)(x-y+1)=0$. 因为已知二次曲线 $F(x,y)=0$ 的渐近方向为 $m':n'=1:1$,所以对于非渐近方向 $m:n$ 一定有 $m\neq n$,因此该二次曲线的共轭于非渐近方向 $m:n$ 的直径方程为

$$x-y+1=0,$$

它只有一条直径.

2. 共轭方向与共轭直径

我们把二次曲线的与非渐近方向 $m:n$ 共轭的直径方向

$$m':n'=-(a_{12}m+a_{22}n):(a_{11}m+a_{12}n),$$

叫做非渐近方向 $m:n$ 的共轭方向,所以有

$$\begin{aligned}\Phi(m',n')&=a_{11}(a_{12}m+a_{22}n)^2-2a_{12}(a_{12}m+a_{22}n)\\&\quad\cdot(a_{11}m+a_{12}n)+a_{22}(a_{11}m+a_{12}n)^2\\&=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n)\\&=I_2\Phi(m,n).\end{aligned}$$

因为 $m:n$ 为非渐近方向,所以 $\Phi(m,n)\neq 0$,因此,当 $I_2\neq 0$,即二次

曲线为中心二次曲线时，$\Phi(m',n')\neq 0$. 当 $I_2=0$，即二次曲线为非中心二次曲线时，$\Phi(m',n')=0$. 这就是说，中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.

由 $m':n'=-(a_{12}m+a_{22}n):(a_{11}m+a_{12}n)$ 得二次曲线的非渐近方向 $m:n$ 与它的共轭方向 $m':n'$ 之间的关系

$$a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}mn'=0.$$

从上式看出，方向 $m:n$ 与 $m':n'$ 方向是对称的，因此对中心二次曲线来说，非渐近方向 $m:n$ 的共轭方向为非渐近方向 $m':n'$，而 $m':n'$ 的共轭方向就是 $m:n$.

定义 5.4.2 中心二次曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对**共轭直径**.

设 $\frac{n}{m}=k$，$\frac{n'}{m'}=k'$，代入式 $a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}nn'=0$，得

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0,$$

这就是一对共轭直径的斜率满足的关系式.

例如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对共轭直径的斜率 k 与 k' 的关系为 $\frac{1}{b^2}kk'+\frac{1}{a^2}=0$，即 $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$. 而双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对共轭直径的斜率 k 与 k' 的关系为 $\frac{1}{b^2}kk'-\frac{1}{a^2}=0$，即 $\frac{1}{b^2}kk'=\frac{b^2}{a^2}$.

在式 $a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}nn'=0$ 中，如果设 $m:n=m':n'$，那么有

$$a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2=0,$$

显然，此时 $m:n$ 为二次曲线的渐近方向. 因此如果对二次曲线的共轭方向从 $a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}nn'=0$ 作代数的推广，那么渐近方向可以看成与自己共轭方向，从而渐近线也就可以看成与自己共轭的直径，故中心二次曲线渐近线的方程可以写成

$$mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0,$$

其中 $m:n$ 为二次曲线的渐近方向.

习　题　5.4

1. 求二次曲线

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$$

与直线 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点轨迹.

2. 求二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ 通过点(8,0)的直径方程,并求其共轭直径.

3. 已知抛物线 $y^2=-8x$,通过点$(-1,1)$引一弦,使它在这点被平分,求该弦所在直线的方程.

4. 试证:通过中心二次曲线中心的直线,一定是中心二次曲线的直径.平行于无心二次曲线渐近方向的直线,一定是无心二次曲线的直径.

5. 求二次曲线 $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ 与二次曲线 $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$ 的公共直径.

5.5　二次曲线的主直径与主方向

定义 5.5.1　二次曲线的垂直于其共轭弦的直径叫做该二次曲线的**主直径**,主直径的方向与垂直于主直径的方向都叫做该二次曲线的**主方向**.

显然,主直径是二次曲线的对称轴,因此主直径也叫做二次曲线的**轴**,轴与二次曲线的交点叫做该二次曲线的**顶点**.

现在我们在直角坐标系下来求二次曲线 L 的主方向与主直径.

如果二次曲线 L 是中心曲线,那么与二次曲线 L 的非渐近方向 $m:n$ 共轭直径为

$$a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}nn'=0$$

或

$$(a_{11}m+a_{12}n)x+(a_{12}m+a_{22}n)y+a_{13}m+a_{23}n=0.$$

设直径的方向为 $m':n'$，那么

$$m':n'=-(a_{12}m+a_{22}n):(a_{11}m+a_{12}n).$$

根据主方向的定义，$m:n$ 成为主方向的条件是它垂直于它的共轭方向，在直角坐标系下，由两方向垂直条件，得

$$mm'+nn'=0 \quad 或 \quad m':n'=-n:m.$$

把上式代入 $m':n'=-(a_{12}m+a_{22}n):(a_{11}m+a_{12}n)$，得

$$m:n=(a_{11}m+a_{12}n):(a_{12}m+a_{22}n).$$

因此 $m:n$ 成为中心二次曲线 L 的主方向的条件是

$$\begin{cases} a_{11}m+a_{12}n=\lambda m, \\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n \end{cases}$$

成立，其中 $\lambda\neq 0$，或把它改写成

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)m+a_{12}n=0, \\ a_{12}m+(a_{22}-\lambda)n=0. \end{cases}$$

这是一个关于 m,n 的齐次线性方程组，而 m,n 不能全为零，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$. 因此对于中心二次曲线来说，只要由上方程中解出 λ，再代入 $\begin{cases} a_{11}m+a_{12}n=\lambda m, \\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n \end{cases}$ 就能得到它的主方向.

如果二次曲线 L 是非中心二次曲线，那么它的任何直径的方向总是它的唯一的渐近方向

$$m_1:n_1=-a_{12}:a_{11}=a_{22}:(-a_{12}),$$

而垂直于它的方向显然为

$$m_2:n_2=a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22},$$

所以非中心二次曲线 L 的主方向为：

渐近主方向 $m_1:n_1=-a_{12}:a_{11}=a_{22}:(-a_{12})$，

非渐近主方向 $m_2:n_2=a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}$.

如果我们把 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 推广到非中心二次曲线，即式 λ^2-

$I_1\lambda+I_2=0$ 中的 I_2 可取零值，这样当 $I_2=0$ 时，方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的两根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=I_1=a_{11}+a_{22}$，把它代入

$$\begin{cases} a_{11}m+a_{12}n=\lambda m, \\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n \end{cases}$$

所得的主方向，正是非中心二次曲线的渐近主方向与非渐近主方向.

因此，一个方向 $m:n$ 成为二次曲线 L 的主方向的条件是

$$\begin{cases} a_{11}m+a_{12}n=\lambda m, \\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n \end{cases}$$

成立，这里的 λ 是方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的根.

定义 5.5.2 方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad \lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

称为二次曲线 L 方程的**特征方程**，特征方程的根叫做二次曲线 L 方程的**特征根**.

从二次曲线 L 的特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 求出特征根 λ，把它代入 $\begin{cases} a_{11}m+a_{12}n=\lambda m, \\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n, \end{cases}$ 我们就得到相应的主方向，如果主方向是非渐近方向，那么根据 $mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0$ 就能得到共轭于它的主直径.

定理 5.5.1 二次曲线的特征根都是实数.

证 因为特征方程的判别式

$$\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0,$$

所以二次曲线的特征根都是实数.

定理 5.5.2 二次曲线的特征根不能全为零.

证 如果二次曲线的特征根全为零，那么由

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

得 $I_1=I_2=0$，即 $a_{11}+a_{22}=0$ 与 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$，从而得

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=0,$$

这与二次曲线的定义矛盾,所以二次曲线的特征根不能全为零.

定理 5.5.3 由二次曲线 L 的特征根 λ 确定的主方向 $m:n$,当 $\lambda\neq 0$ 时,为二次曲线的非渐近主方向;当 $\lambda=0$ 时,为二次曲线的渐近主方向.

证 因为

$$\begin{aligned}\Phi(m,n) &= a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2\\ &=(a_{11}m+a_{12}n)m+(a_{12}m+a_{22}n)n.\end{aligned}$$

所以由 $\begin{cases}a_{11}m+a_{12}n=\lambda m,\\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n,\end{cases}$ 得

$$\Phi(m,n)=\lambda m^2+\lambda n^2=\lambda(m^2+n^2).$$

又因为 m,n 不全为零,所以当 $\lambda\neq 0$ 时,有 $\Phi(m,n)\neq 0$,所以 $m:n$ 为二次曲线 L 的非渐近主方向;当 $\lambda=0$ 时,有 $\Phi(m,n)=0$,所以 $m:n$ 为二次曲线 L 的渐近主方向.

定理 5.5.4 中心二次曲线至少有两条主直径,非中心二次曲线只有一条主直径.

证 由二次曲线 L 的特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 解得两特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{I_1\pm\sqrt{I_1^2-4I_2}}{2}.$$

(1) 二次曲线 L 是中心二次曲线,即 $I_2\neq 0$ 时.如果特征方程的判别式

$$\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2=0,$$

那么

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{12}=0,$$

这时的中心二次曲线为圆(包括点圆和虚圆),它的特征根为一对二重根

$$\lambda_1=\lambda_2=a_{11}=a_{22}\quad(\neq 0).$$

把它代入 $\begin{cases}a_{11}m+a_{12}n=\lambda m,\\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n,\end{cases}$ 则得到两个恒等式,它被任何方向 $m:n$

所满足,所以任何实方向都是圆的非渐近主方向,从而通过圆心的任何直线不仅都是直径,而且都是圆的主直径.如果特征方程的判别式 $\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2>0$,那么特征根为两不等的非零实根 λ_1,λ_2.将它们分别代入

$$\begin{cases}a_{11}m+a_{12}n=\lambda m,\\ a_{12}m+a_{22}n=\lambda n\end{cases}$$

得相应的两个非渐近主方向为

$$m_1:n_1=a_{12}:(\lambda_1-a_{11})=(\lambda_1-a_{22}):a_{12},$$
$$m_2:n_2=a_{12}:(\lambda_2-a_{11})=(\lambda_2-a_{22}):a_{12}.$$

这两主方向相互垂直,从而它们又互相共轭,因此非圆的中心二次曲线有且只有一对互相垂直从而又互相共轭的主直径.

(2) 当二次曲线 L 是非中心二次曲线,即 $I_2=0$ 时,这时两特征根为

$$\lambda_1=a_{11}+a_{22},\quad \lambda_2=0.$$

所以它只有一个非渐近的主方向,即与 $\lambda_1=a_{11}+a_{22}$ 相应的主方向,从而非中心二次曲线只有一条主直径.

例 5.5.1 求二次曲线 $F(x,y)\equiv x^2-xy+y^2-1=0$ 的主方向与主直径.

解 因为 $I_1\equiv 1+1=2$, $I_2=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\neq 0$,所以该二次曲线是中心二次曲线,它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0,$$

解这个方程得到两个特征根分别为

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

由特征根 $\lambda_1=\frac{1}{2}$ 确定的主方向为

$$m_1:n_1=-\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}:-\frac{1}{2}=1:1;$$

由特征根 $\lambda_2=\frac{3}{2}$确定的主方向为

$$m_2:n_2=-\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=-1:1.$$

又因为 $F_1(x,y)\equiv x-\frac{1}{2}y, F_2(x,y)\equiv-\frac{1}{2}x+y$,所以该曲线的主直径为

$$\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\left(-\frac{1}{2}x+y\right)=0$$

与

$$-\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\left(-\frac{1}{2}x+y\right)=0,$$

即 $x+y=0$ 与 $x-y=0$.

习 题 5.5

1. 分别求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,抛物线 $y^2=2px$ 的主方向与主直径.

2. 求二次曲线 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 的主方向与主直径.

3. 试证明二次曲线两个不同特征根确定的主方向互相垂直.

5.6 二次曲线的方程的化简与分类

这一节,我们将在直角坐标系下,利用直角坐标变换对二次曲线的方程进行化简,使其方程在新坐标系下具有最简形式,然后在此基础上进行二次曲线的分类.

1. 平面直角坐标变换

我们知道,如果平面上一点的旧坐标与新坐标分别为(x,y)与(x',y'),那么移轴公式为

$$\begin{cases}x=x'+x_0,\\ y=y'+y_0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x'=x-x_0,\\ y'=y-y_0,\end{cases}$$

其中(x_0,y_0)是新坐标系原点在旧坐标系下的坐标. 转轴公式为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{cases}$$

其中α为坐标轴的旋转角.

在一般情形,由旧坐标系$O\text{-}xy$变成新坐标系$O'\text{-}x'y'$,总可以分两步来完成,先移轴使坐标系的原点O与新坐标系的原点O'重合,变成坐标系$O''\text{-}x''y''$,然后由辅助坐标系$O''\text{-}x''y''$再转轴而成新坐标系$O'\text{-}x'y'$,如图 5-6-1 所示. 设平面上任意点P的旧坐标与新坐标分别为(x,y)与(x',y'),而在辅助坐标系$O''\text{-}x''y''$中的坐标为(x'',y''),那么由移轴公式与旋转公式分别得

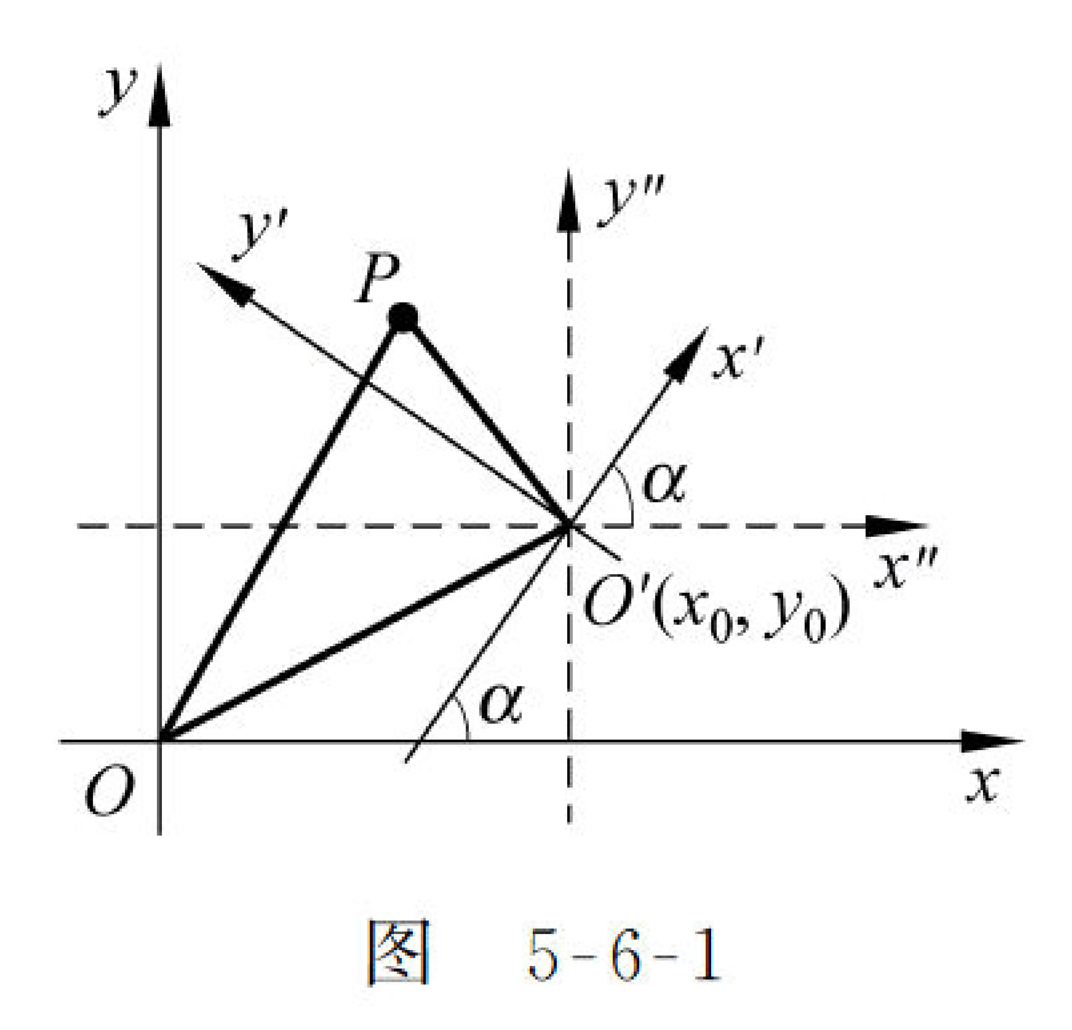


图 5-6-1

$$\begin{cases}x=x''+x_0,\\ y=y''+y_0\end{cases}\quad 与 \quad \begin{cases}x''=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y''=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.\end{cases}$$

由上两式得**一般坐标变换公式**为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0.\end{cases}$$

一般坐标变换公式的逆变换公式为

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha-(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha),\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha-(-x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha).\end{cases}$$

平面直角一般坐标变换公式的逆变换公式是由新坐标系原点的坐标(x_0,y_0)与坐标轴的旋转角α决定的.

在坐标变换下，平面上曲线的方程将改变，但是如果曲线方程 $F(x,y)=0$ 的左端 $F(x,y)$ 是一个多项式，其次数为 n，那么通过一般坐标变换公式，它的新方程 $F(x',y')=0$ 的左端 $F(x',y')$ 将仍然是一个多项式，而且它的次数 n' 不变，即 $n=n'$. 这是因为一般坐标变换公式的右端是一个一次式，把它代入 $F(x,y)$ 得到的 $F(x',y')$ 将仍然是一个多项式，而且它的次数 $n'\leqslant n$；反过来，通过一般坐标变换公式的逆变换公式，$F(x',y')$ 将变回到 $F(x,y)$，而一般坐标变换公式的逆变换公式的右端也是一个一次式，从而 $F(x,y)$ 的次数 $n\leqslant n'$. 于是 $n'=n$，即 $F(x',y')$ 的次数与 $F(x,y)$ 的次数相等.

我们把多项式 $F(x,y)$ 构成的方程 $F(x,y)=0$ 叫做**代数方程**，而由它表示的曲线叫做**代数曲线**，方程的次数叫做**曲线的次数**. 上面指出的这个曲线的性质，是曲线的固有性质，它与坐标系的选择无关.

2. 利用平面直角坐标变换化简二次曲线的方程与分类

在平面上，对于坐标变换而言，它是只改变坐标系的位置而图形的形状和大小皆不变；而对于点变换而言，它是坐标系不变而只改变图形的位置(形状大小皆不变). 事实上，这二者的结果是完全一致的. 如图 5-6-2(坐标变换)和图 5-6-3 (正交变换)所示，二次曲线 L 对坐标系 O'-$x'y'$ 的方程与 L' 对 O-xy 的方程是一致的.

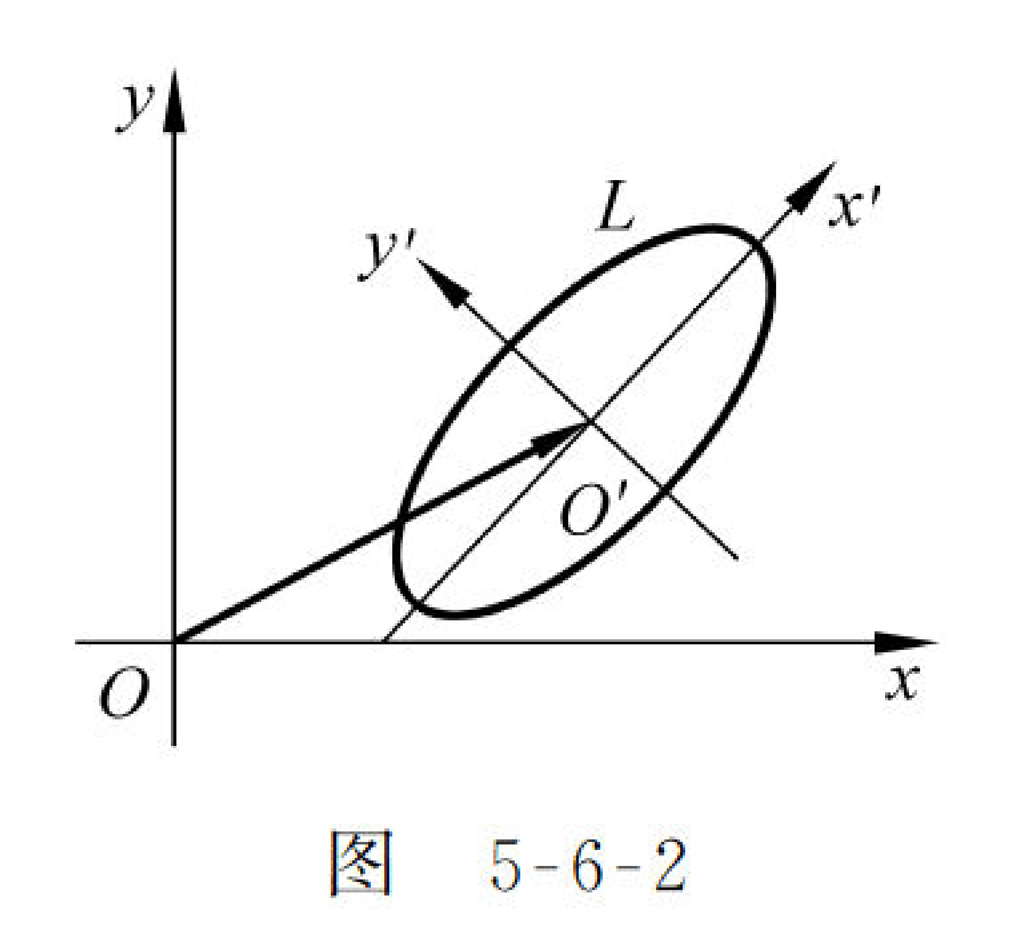


图 5-6-2

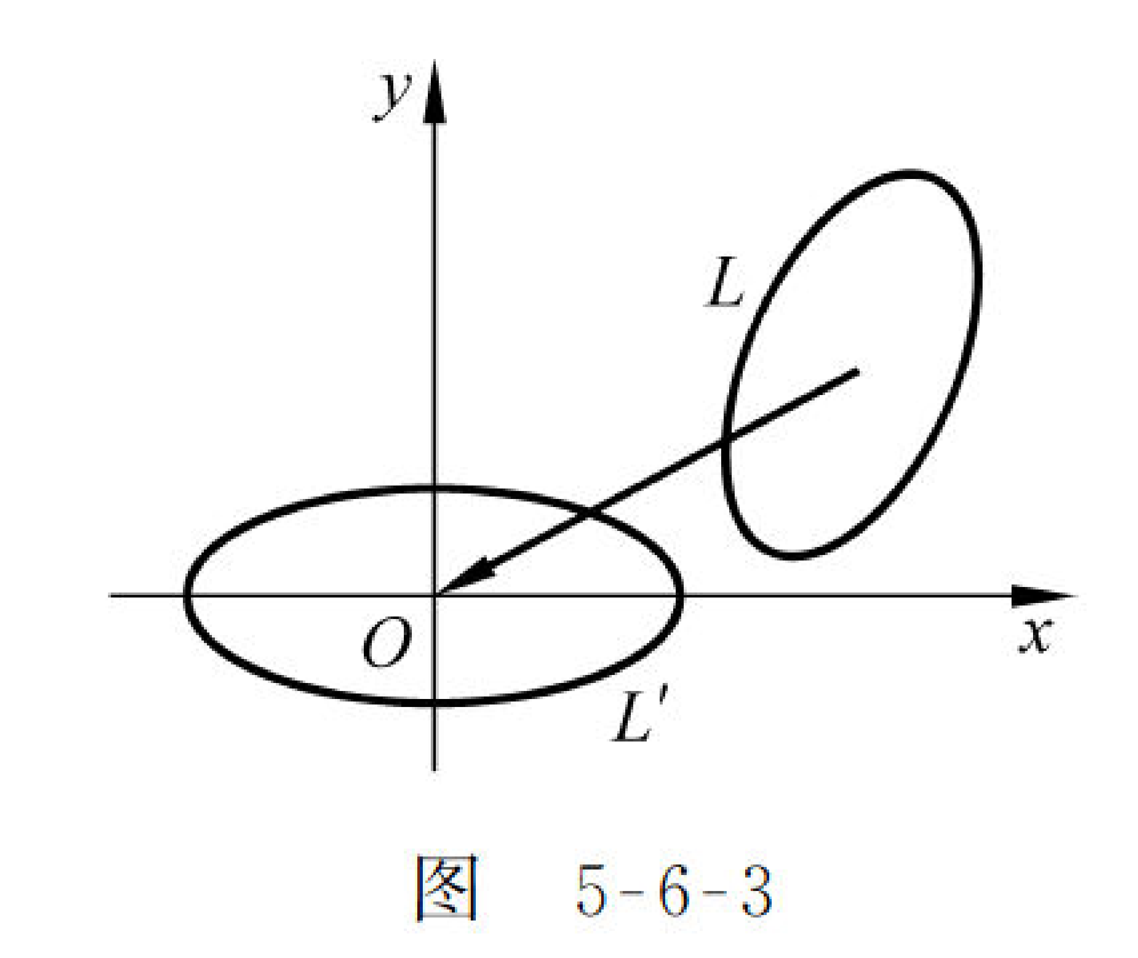


图 5-6-3

从变换公式来看，在坐标变换中，将坐标原点移至 $O'(x_0, y_0)$，再将坐标轴旋转 α 角的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

其中(x, y)是一点在旧坐标系下的坐标，(x', y')是同一点在新坐标系下的坐标.

而坐标轴不动，将图形沿方向$(-x_0, -y_0)$作平移的点变换公式为

$$T_1: \begin{cases} \bar{x} = x - x_0, \\ \bar{y} = y - y_0, \end{cases}$$

其中(x, y)和$(\bar{x}, \bar{y})$是作点变换后对应点对同一坐标系 $O\text{-}xy$ 的坐标.

再将平移后的图形绕坐标系原点作旋转变换，旋转角为$-\alpha$，变换公式为

$$T_2: \begin{cases} x' = \bar{x}\cos(-\alpha) - \bar{y}\sin(-\alpha), \\ y' = \bar{x}\sin(-\alpha) + \bar{y}\cos(-\alpha), \end{cases}$$

其中$(\bar{x}, \bar{y})$和(x', y')是作旋转变换后的对应点对同一坐标系 $O\text{-}xy$ 的坐标. 作这两个变换的乘积，得

$$T_2 \cdot T_1: \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos(-\alpha) - (y - y_0)\sin(-\alpha), \\ y' = (x - x_0)\sin(-\alpha) + (y - y_0)\cos(-\alpha), \end{cases}$$

即

$$T_2 \cdot T_1: \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases}$$

我们可以看出上述复合变换即由一般坐标变换公式解出 x', y' 的结果，实际上一般坐标变换公式与上述复合变换是同一公式，因此在图 5-6-2 中，曲线 L 关于坐标系$O'\text{-}x'y'$的方程与图 5-6-3 中的曲线 L'关于坐标系$O\text{-}xy$ 的方程是完全一样的.

根据以上讨论，我们可以将坐标变换公式，理解为方向相反的点变换公式，因此利用坐标变换给一般二次曲线所作的分类，完全可以

理解为利用点变换所做的分类.

下面讨论利用平面直角坐标变换化简二次曲线的方程

设二次曲线 L 的方程为

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

我们要选取一个适当的坐标系,也就是要确定一个坐标变换,使得二次曲线 L 在新坐标系下的方程最为简单,这就是二次曲线方程的化简. 为此,我们必须了解在坐标变换下二次曲线方程的系数是怎样变化的. 因为一般坐标变换是由移轴与转轴组成,所以我们分别考察在移轴与转轴下,二次曲线方程 L 的系数的变化规律.

如果把移轴公式,即

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0 \end{cases}$$

代入二次曲线 L 的方程中,得到在移轴公式下二次曲线 L 的新方程为

$$\begin{aligned} F(x'+x_0,y'+y_0)\equiv & a_{11}(x'+x_0)^2+2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) \\ & +a_{22}(y'+y_0)^2+2a_{13}(x'+x_0) \\ & +2a_{23}(y'+y_0)+a_{33}=0. \end{aligned}$$

化简整理后记为

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0,$$

其中

$$\begin{cases} a'_{11}=a_{11},a'_{12}=a_{12},a'_{22}=a_{22}, \\ a'_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}, \\ a'_{23}=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}, \\ a'_{33}=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}. \end{cases}$$

因此在移轴公式下,二次曲线 L 方程的系数的变化规律如下:

(1) 二次项系数不变;

(2) 一次项系数变为 $2F_1(x_0,y_0)$ 与 $2F_2(x_0,y_0)$;

(3) 常数项变为 $F(x_0,y_0)$.

因为当点(x_0,y_0)是二次曲线 L 的中心时,有

$$F_1(x_0,y_0),\quad F_2(x_0,y_0),$$

所以当二次曲线是有心二次曲线时,作移轴,可以使原点与二次曲线的中心重合,则在新坐标系下二次曲线的新方程中的一次项消失.

如果把转轴公式,即

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

代入 L 的方程中,得到在转轴公式下二次曲线 L 的新方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

其中

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\ a'_{33} = a_{33}. \end{cases}$$

因此在转轴下,二次曲线 L 方程的系数的变化规律如下:

(1) 二次项系数一般要变.

新方程的二次项系数仅与原方程的二次项系数及旋转角 α 有关,而与一次项系数及常数项无关.

(2) 一次项系数一般要变.

新方程的一次项系数仅与原方程的一次项系数及旋转角 α 有关,而与二次项系数及常数项无关,如果我们从

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha \end{cases}$$

中解出 a_{13},a_{23} 得

$$\begin{cases} a_{13} = a'_{13}\cos\alpha - a'_{23}\sin\alpha, \\ a_{23} = a'_{13}\sin\alpha + a'_{23}\cos\alpha, \end{cases}$$

那么可以进一步看到，在转轴下，二次曲线方程 L 的一次项系数 a_{13}，a_{23} 的变化规律是与点的坐标 x，y 的变化规律完全一样，当原方程有一次项时，通过转轴不能完全消去一次项，当原方程无一次项时，通过转轴也不会产生一次项.

（3）常数项不变.

在二次曲线 L 方程里，如果 $a_{12}\neq 0$，我们往往使用转轴使新方程中的 $a'_{12}=0$. 为此，我们只要取旋转角 α，使得

$$a'_{12}=(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

即 $(a_{22}-a_{11})\sin 2\alpha+2a_{12}\cos 2\alpha=0$，所以

$$\cot 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

因为余切的值可以是任意的实数，所以总有 α 满足上式，也就是说总可以经过适当的转轴消去二次曲线 L 方程的 xy 项.

例 5.6.1 化简二次曲线方程

$$x^2+4xy+4y^2+12x-y+1=0,$$

并画出它的图形.

解 因为二次曲线方程含有 xy 项，因此我们总可以先通过转轴消去 xy 项. 设旋转角为 α，那么由 $\cot 2\alpha=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$，得

$$\cot 2\alpha=-\frac{3}{4},$$

即 $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=-\dfrac{3}{4}$，所以 $2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，从而得

$$\tan\alpha=-\frac{1}{2}\quad 或\quad \tan\alpha=2.$$

取 $\tan\alpha=2\left(或\ \tan\alpha=-\dfrac{1}{2}\right)$，那么

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以转轴公式为

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}x' - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}y', \\ y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x' + \dfrac{\sqrt{5}}{5}y'. \end{cases}$$

将上转轴公式代入原方程化简整理得转轴后的新方程为

$$5x'^2 + 2\sqrt{5}x' - 5\sqrt{5}y' + 1 = 0.$$

利用配方可把上式化为

$$\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \sqrt{5}y' = 0.$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{\sqrt{5}}{5}, \\ y'' = y', \end{cases}$$

曲线方程便化为最简形式 $x''^2 - \sqrt{5}y'' = 0$. 或写成标准方程为

$$x''^2 = \sqrt{5}y''.$$

这是一条抛物线,它的顶点是新坐标系 O''-$x''y''$的原点. 原方程的图形可以根据它在坐标系 O''-$x''y''$中的标准方程作出,它的图形如图 5-6-4 所示.

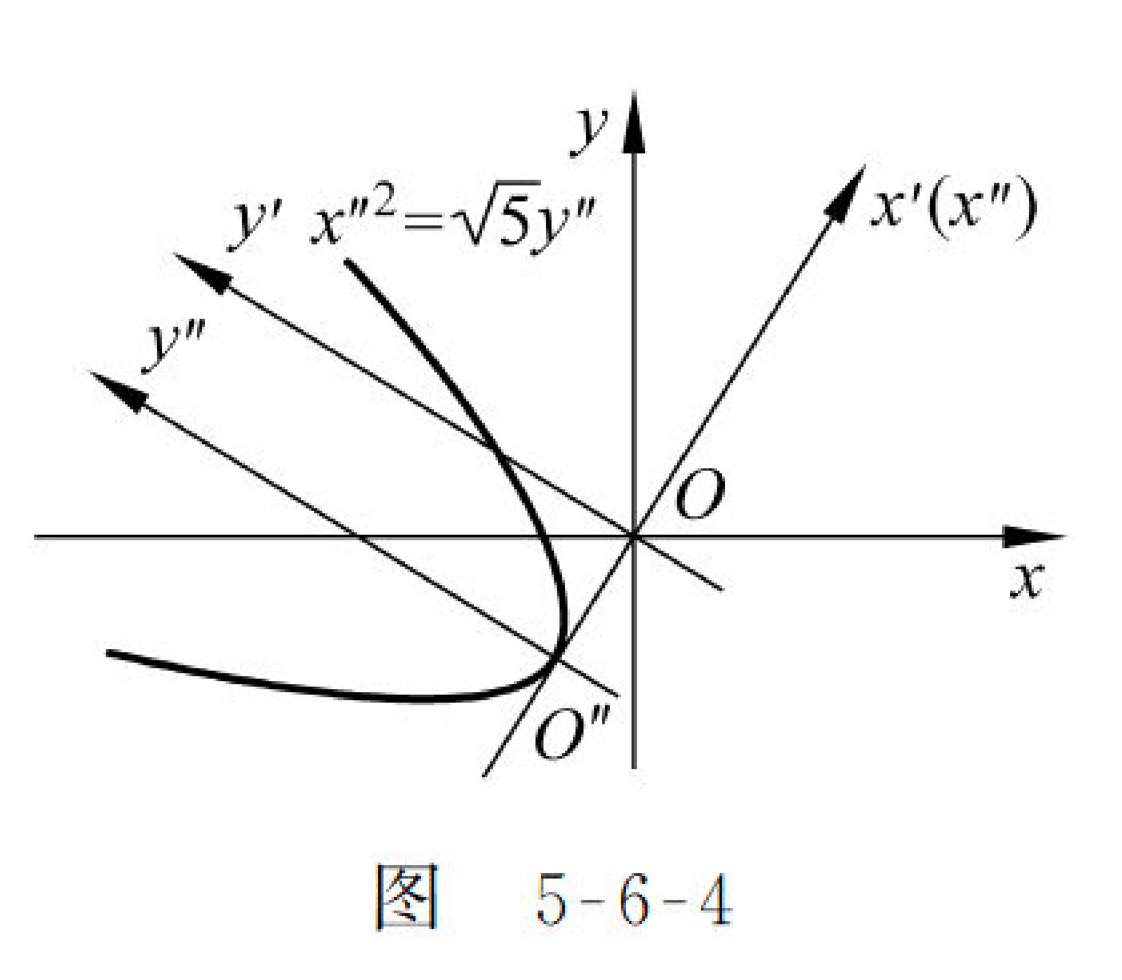


图 5-6-4

例 5.6.2 化简二次曲线方程

$$x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0,$$

并画出它的图形.

解 因为

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \neq 0,$$

所以该曲线为中心二次曲线. 解方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y) = x - \dfrac{1}{2}y + 1 = 0, \\ F_2(x,y) = -\dfrac{1}{2}x + y - 2 = 0, \end{cases}$$

得到中心坐标是 $x=0$, $y=2$,取点(0,2)作为新坐标系的原点,作移轴

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

变换后,原方程可变为

$$x'^2 - x'y' + y'^2 - 4 = 0.$$

再作转轴变换消去 $x'y'$,由 $\cot 2\alpha = \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$ 得 $\cot 2\alpha = 0$,从而取 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$,故转轴公式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'', \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'', \end{cases}$$

经此转轴变换后,曲线的方程化为最简形式

$$\frac{1}{2}x''^2 + \frac{3}{2}y''^2 - 4 = 0,$$

或写成标准形式

$$\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{\frac{8}{3}} = 1.$$

这是一个椭圆方程,图形如图 5-6-5 所示.

图 5-6-5

利用转轴来消去二次曲线方程的 xy 项,它的一个几何意义,就是把坐标轴旋转到与二次曲线的主方向平行的位置;而利用移轴,它的一个几何意义,就是把坐标系的原点移到二次曲线的中心位置.

因此，上面介绍的通过转轴与移轴来化简二次曲线方程的方法，实际上是把坐标轴变到与二次曲线的主直径（即对称轴）重合的位置. 如果是中心二次曲线，坐标原点与该二次曲线的中心重合；如果是无心二次曲线，坐标原点与曲线的顶点重合；如果是线心二次曲线，坐标原点可以与该二次曲线的任何一个中心重合. 下面再看两个例题.

例 5.6.3 化简二次曲线方程

$$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0,$$

并画出它的图形.

解 因为二次曲线方程含有 xy 项，因此我们总可以先通过转轴消去 xy 项. 设旋转角为 α，那么由 $\cot 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$，得

$$\cot 2\alpha=0,$$

从而可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y', \end{cases}$$

将上转轴公式代入原方程化简整理得转轴后的新方程为

$$x'^2-5y'^2-20\sqrt{2}y'-42=0.$$

利用配方可把上式化为 $x'^2-5(y'-2\sqrt{2})^2-2=0$，再作移轴

$$\begin{cases} x''=x', \\ y''=y'-2\sqrt{2}, \end{cases}$$

曲线方程便化为最简形式

$$x''^2-5y''^2-2=0,$$

或写成标准方程为

$$\frac{x''^2}{2}-\frac{y''^2}{\frac{2}{5}}=1.$$

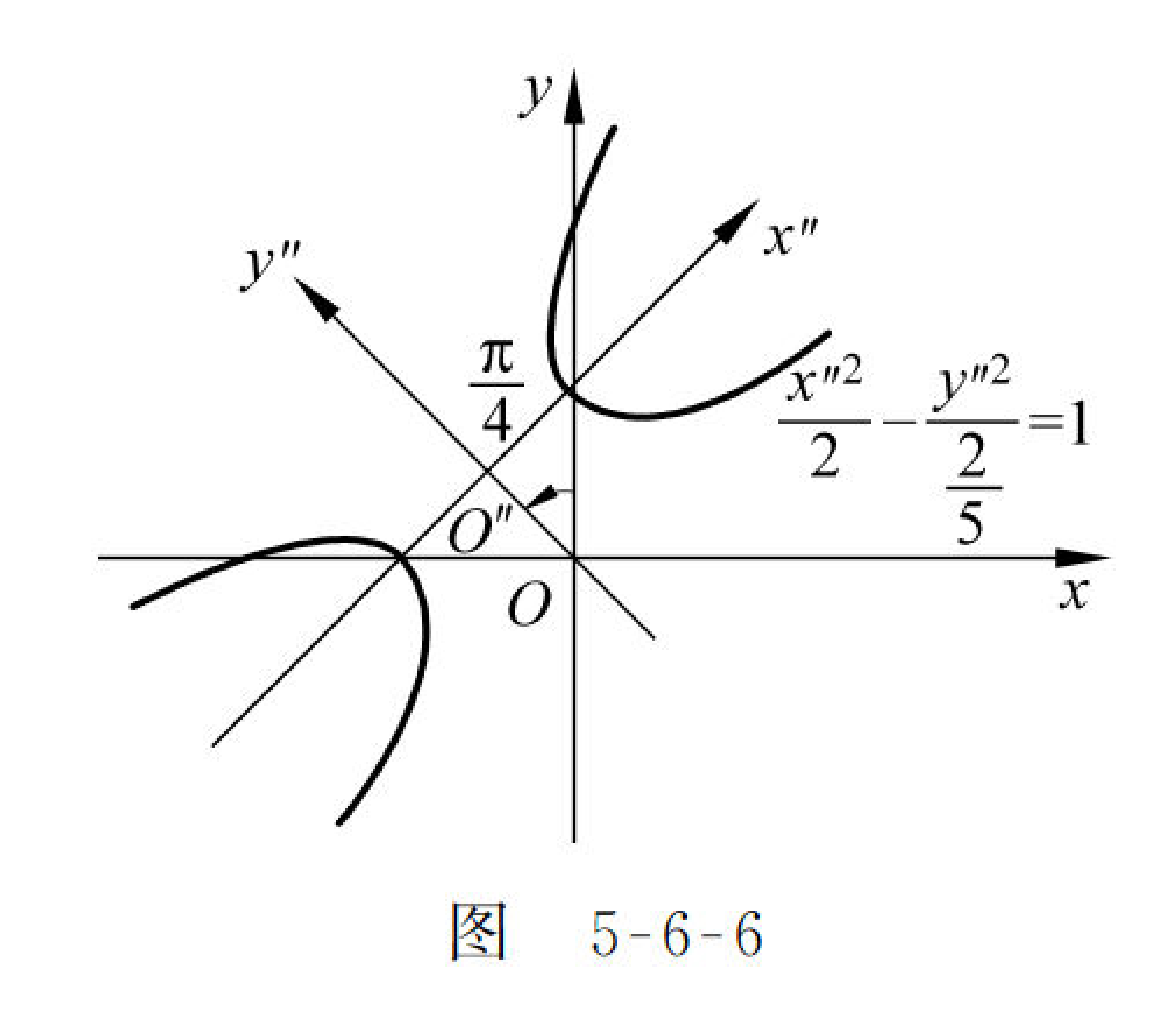


图 5-6-6

这是一条双曲线，它的中心是新坐标系 O''-$x''y''$ 的原点. 原方程的图形可以根据它在坐标系 O''-$x''y''$ 中的标准方程作出，图形如图 5-6-6 所示.

例 5.6.4 化简二次曲线方程 $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$，并画出它的图形.

解 因为二次曲线方程含有 xy 项，因此我们总可以先通过转轴消去 xy 项. 设旋转角为 α，那么由

$$\cot 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}},$$

得

$$\cot 2\alpha=0,$$

从而可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y',\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'.\end{cases}$$

将上述转轴公式代入原方程化简整理得转轴后的新方程为

$$2y'^2-2\sqrt{2}y'-3=0.$$

利用配方可把上式化为 $2\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4=0$，即 $\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$，再作移轴

$$\begin{cases}x''=x',\\ y''=y'-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$$

曲线方程便化为最简形式

$$y''^2=2,$$

即 $y''=\sqrt{2}$或 $y''=-\sqrt{2}$.

这是两条平行直线. 原方程的图形可以根据它在坐标系 O''-$x''y''$中的标准方程作出，图形如图 5-6-7 所示.

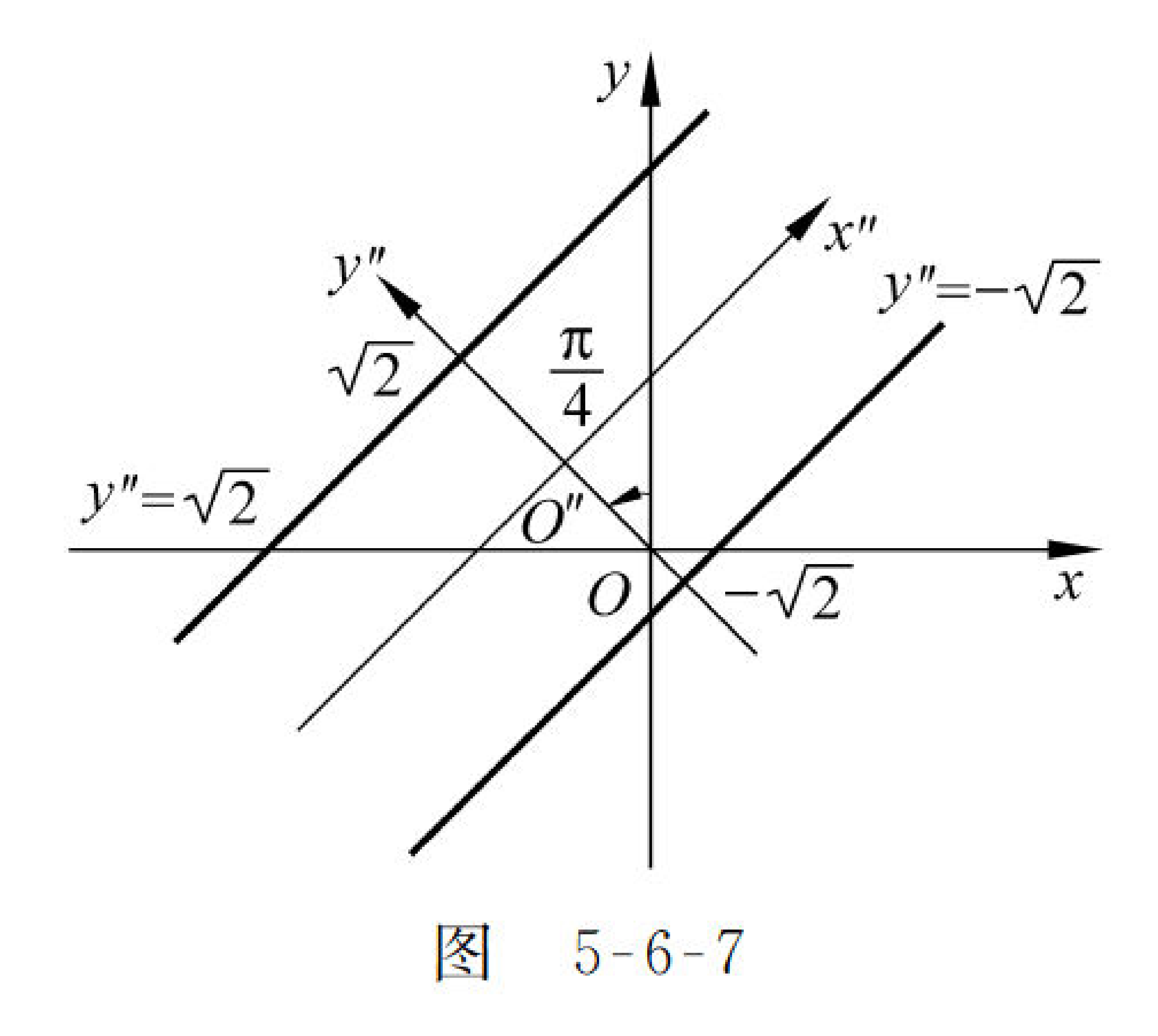


图 5-6-7

由例 5.6.4 可知，一条二次曲线居然表示两条平行直线！那么二次曲线除了我们熟悉的椭圆、双曲线、抛物线和两条平行直线外，还会有别的形式吗？

一般说来，我们有下面的定理.

定理 5.6.1 适当选取坐标系，二次曲线的方程总可以化成下列 3 个简化方程中的一个：

(1) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, a_{11}a_{22}\neq 0$;

(2) $a_{22}y^2+2a_{13}x=0, a_{22}a_{13}\neq 0$;

(3) $a_{22}y^2+a_{33}=0, a_{22}\neq 0$.

证 根据二次曲线是中心二次曲线、无心二次曲线与线心二次曲线 3 种情况来讨论.

(1) 当已知二次曲线是中心二次曲线时，取它的一对既共轭又互相垂直的主直径作为坐标轴建立直角坐标系. 设二次曲线在这样的坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

因为这时原点就是二次曲线的中心. 所以由定理 5.3.1 的推论可知

$$a_{13}=a_{23}=0.$$

其次，二次曲线的两条主直径（即坐标轴）的方向为 1∶0 与 0∶1，它们互相共轭，因此根据

$$a_{11}mm'+a_{12}(mn'+m'n)+a_{22}nn'=0$$

有 $a_{12}=0$，所以二次曲线的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, a_{11}a_{22}\neq 0.$$

(2) 当已知二次曲线是无心二次曲线时，取它的唯一主直径作

为 x 轴，而过顶点（即主直径与曲线的交点）且以非渐近主方向为方向的直线（即过顶点垂直于主直径的直线）为 y 轴，建立直角坐标系. 设这时二次曲线的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

因为这时主直径的共轭方向为 $m:n=0:1$，所以主直径的方程为 $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$，它就是 x 轴，即与直线 $y=0$ 重合，所以 $a_{12}=a_{23}=0, a_{22}\neq 0$.

又因为顶点与坐标原点重合，所以 $(0,0)$ 满足曲线方程，从而 $a_{33}=0$.

其次，由于二次曲线是无心二次曲线，所以

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}},$$

而 $a_{12}=0, a_{22}\neq 0$，所以有 $a_{11}=0, a_{13}\neq 0$. 所以该二次曲线的方程为

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0,\quad a_{22}a_{13}\neq 0.$$

(3) 当已知二次曲线是线心二次曲线时，取它的中心直线（即曲线的唯一直径也是主直径）作为 x 轴，任意垂直于它的直线作为 y 轴，建立直角坐标系. 设这时二次曲线的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

因为二次曲线是线心二次曲线，所以它的中心直线的方程是

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \quad 与 \quad a_{12}x+a_{22}y+2a_{23}=0$$

中的任何一个，第二个方程表示 x 轴的条件为

$$a_{12}=a_{23}=0,\quad a_{22}\neq 0.$$

而第一个方程在 $a_{12}=0$ 的条件下，不可能再表示 x 轴，所以它的必须是恒等式，因而有 $a_{11}=a_{13}=0$，所以曲线的方程为

$$a_{22}y^2+a_{33}=0,\quad a_{22}\neq 0.$$

现在我们可以根据二次曲线 3 种简化方程系数的各种不同情况，写出二次曲线的各种标准方程，从而得出二次曲线的分类.

第 1 种情形：曲线是中心二次曲线时，即曲线方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0,\quad a_{11}a_{22}\neq 0.$$

当 $a_{33}\neq 0$ 时，那么方程可化为 $Ax^2+By^2=1$，其中

$$A=-\frac{a_{11}}{a_{33}},\quad B=-\frac{a_{22}}{a_{33}}.$$

[1] 如果 $A>0,B>0$，那么设 $A=\frac{1}{a^2},B=\frac{1}{b^2}$，于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\qquad\text{椭圆}$$

[2] 如果 $A<0,B<0$，那么设 $A=-\frac{1}{a^2},B=-\frac{1}{b^2}$，于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1;\qquad\text{虚椭圆}$$

[3] 如果 A 与 B 异号，那么不失一般性，假设 $A>0,B<0$（在相反情况下，只要把 x 轴与 y 轴对调），设 $A=\frac{1}{a^2},B=-\frac{1}{b^2}$，于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\qquad\text{双曲线}$$

[4] 当 $a_{33}=0$ 时，如果 a_{11} 与 a_{22} 同号，可以假设 $a_{11}>0,a_{22}>0$（在相反情况下，只要在方程两边同时变号），再设

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},\quad a_{22}=\frac{1}{b^2},$$

于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;\qquad\text{点或称两相交于实点的共轭虚直线}$$

[5] 如果 a_{11} 与 a_{22} 异号，类似的可以得到方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;\qquad\text{两相交直线}$$

第 2 种情形：曲线是无心二次曲线时，即曲线方程为

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0,\quad a_{22}a_{13}\neq 0.$$

[6] 设$-\frac{a_{13}}{a_{22}}=p$,于是得到方程

$$y^2=2px; \qquad \text{抛物线}$$

第 3 种情形:曲线是线心二次曲线时,即曲线方程为

$$a_{22}y^2+a_{33}=0, \quad a_{22}\neq 0.$$

方程可以改写成 $y^2=-\frac{a_{33}}{a_{22}}$.

[7] 当 a_{33} 与 a_{22} 异号,设$-\frac{a_{33}}{a_{22}}=a^2$,于是得到方程

$$y^2=a^2; \qquad \text{两平行直线}$$

[8] 当 a_{33} 与 a_{22} 同号,设$\frac{a_{33}}{a_{22}}=a^2$,于是得到方程

$$y^2=-a^2; \qquad \text{两平行共轭虚直线}$$

[9] 当 $a_{33}=0$ 时,得到方程

$$y^2=0. \qquad \text{两重合直线}$$

于是,我们就得到下面的定理.

定理 5.6.2 通过适当地选取坐标系,二次曲线的方程总可以写成下面 9 种标准方程中的一种形式:

[1] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 椭圆

[2] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; 虚椭圆

[3] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 双曲线

[4] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; 点或称两相交于实点的共轭虚直线

[5] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; 两相交直线

[6] $y^2=2px$; 抛物线

[7] $y^2=a^2$; 两平行直线

[8] $y^2=-a^2$; 两平行共轭虚直线

[9] $y^2=0$. 两重合直线

所以，在欧氏平面上，二次曲线的度量分类为如上 9 类.

3. 二次曲面的一般理论

由第 4 章的学习知道，一些柱面、锥面和旋转曲面等二次曲面的方程都是三元二次方程. 一般地，在三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中，由三元二次方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

给出的曲面叫做**二次曲面.**

在$\mathbb{R}^3$中的直角坐标系下，仍然可以用坐标平移变换和坐标旋转变换讨论由方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

给出的二次曲面，并且讨论的步骤和方法几乎与前面讨论一般二次曲线的步骤和方法完全一致. 读者可以自己进行分析讨论和推导，得出有关二次曲面的结论；也可以参考别的资料或教材，在这里就不详细论述了.

习　题　5.6

1. 利用移轴与转轴变换，化简下列二次曲线的方程，并画出它们的图形：

(1) $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$；

(2) $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$；

(3) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$；

(4) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

2. 试证中心二次曲线 $hx^2+2kxy+hy^2=l$ 的两条主直径为 $x^2-y^2=0$，该二次曲线的两半径轴的长分别是

$$\sqrt{\frac{l}{|h+k|}} \quad 及 \quad \sqrt{\frac{l}{|h-k|}}.$$

参 考 文 献

［1］ 吕林根，许子道．解析几何．北京：高等教育出版社，2005

［2］ 陈志杰．高等代数与解析几何．北京：高等教育出版社，2000

［3］ 刘海蔚，吴小平．解析几何学．四川：西南师范大学出版社，2000

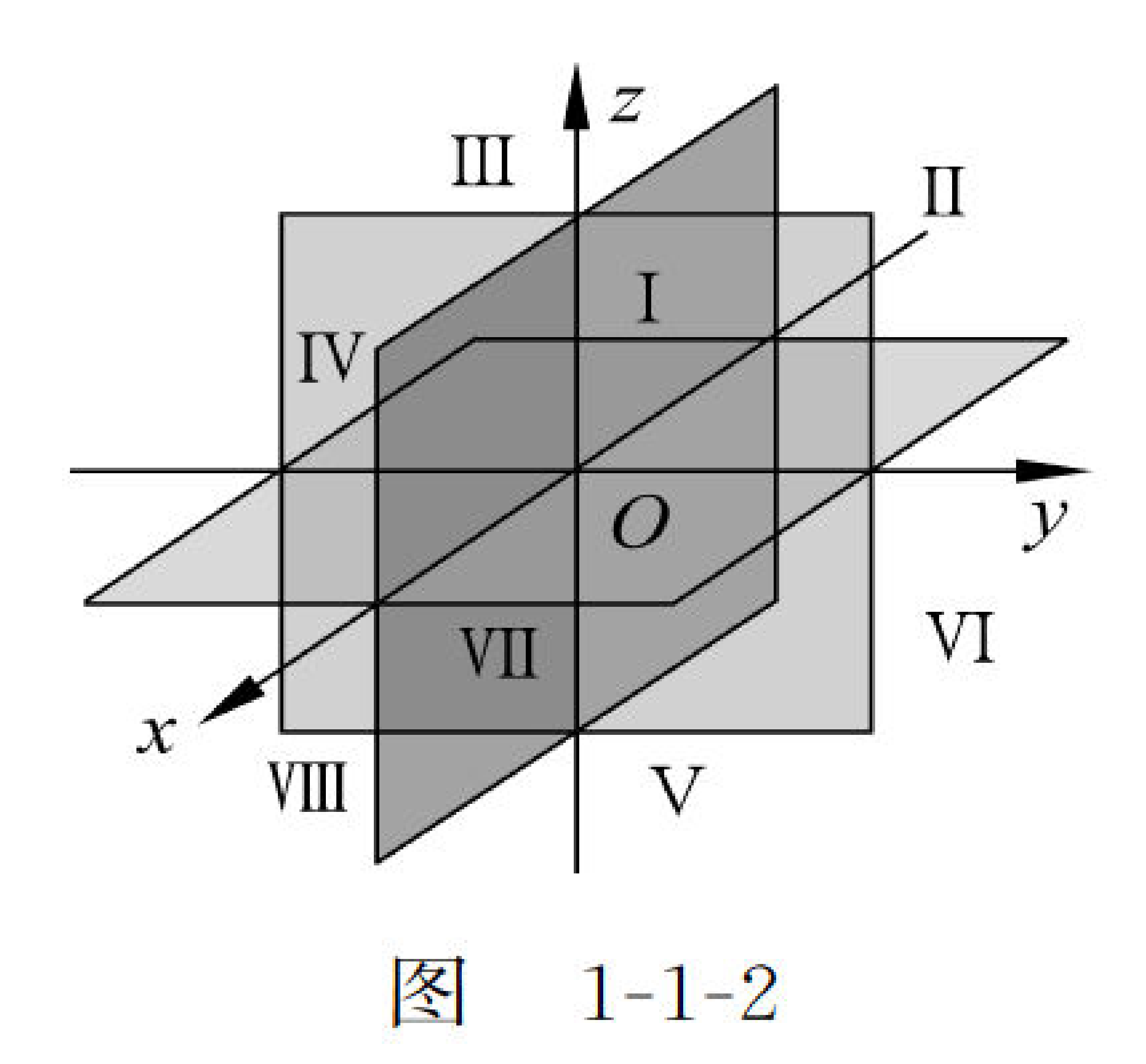


图　1-1-2

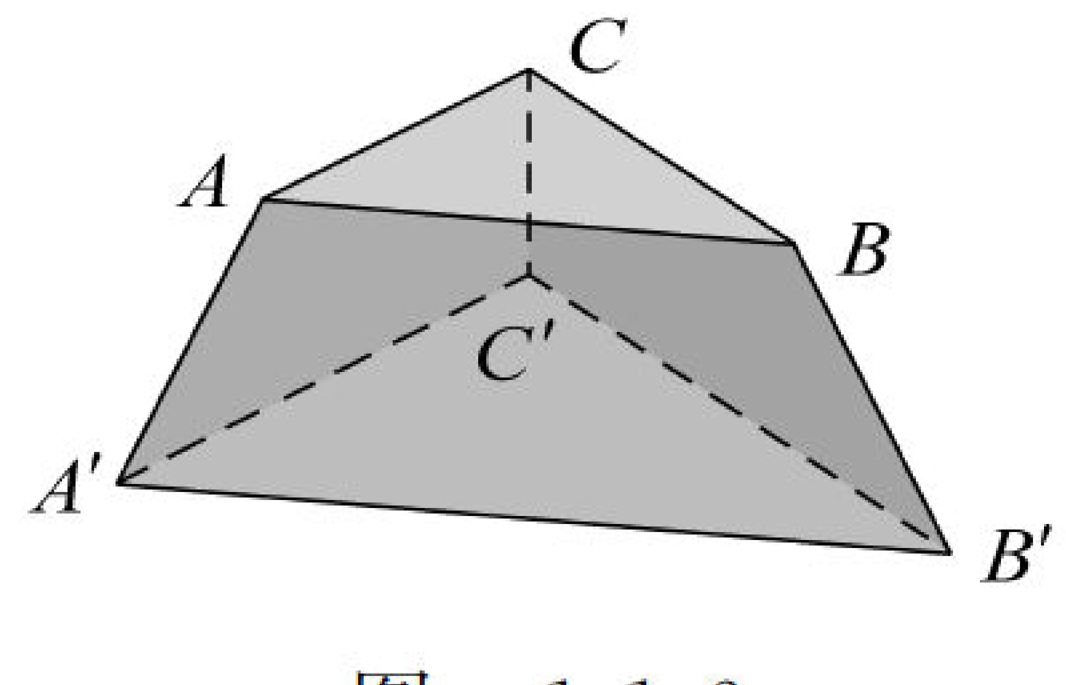


图　1-1-6

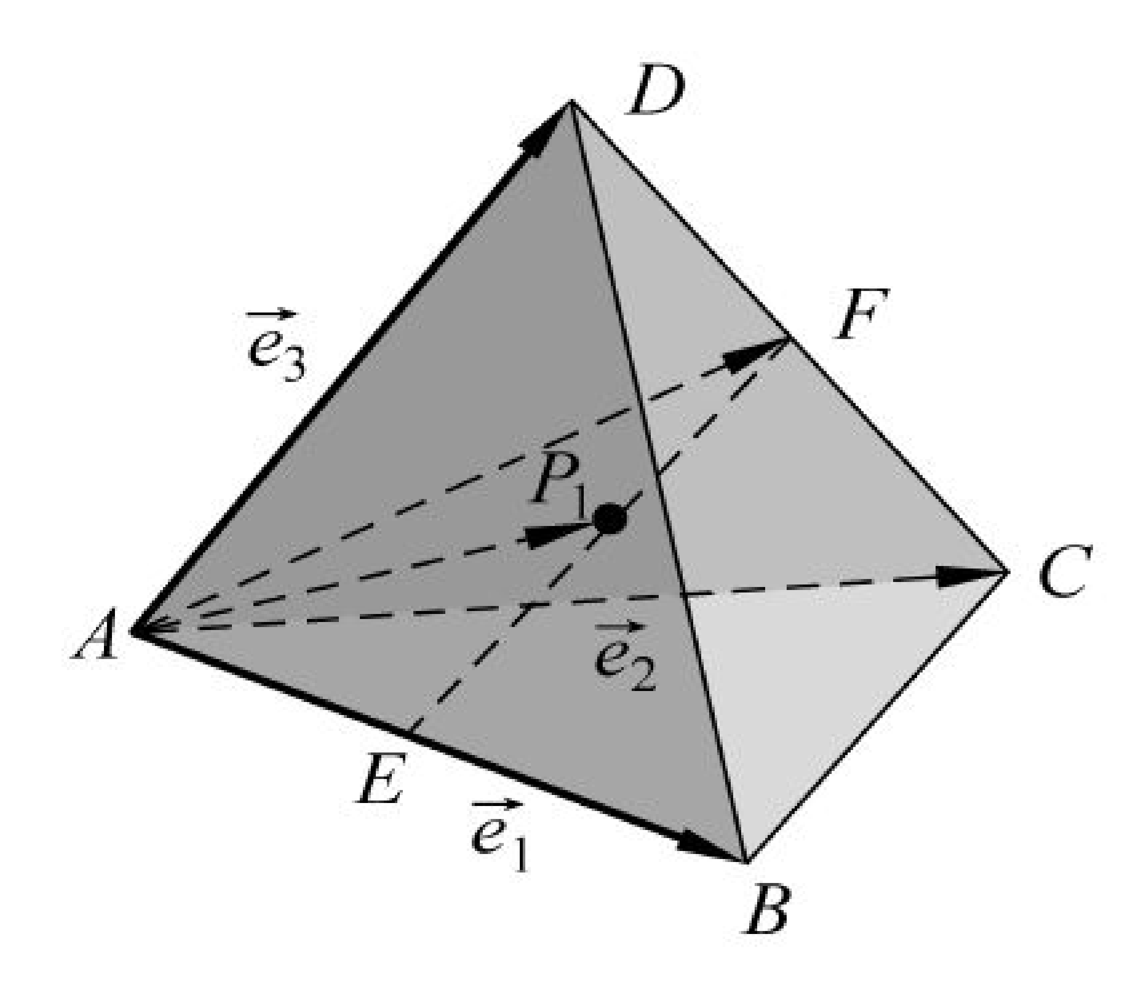


图　1-4-1

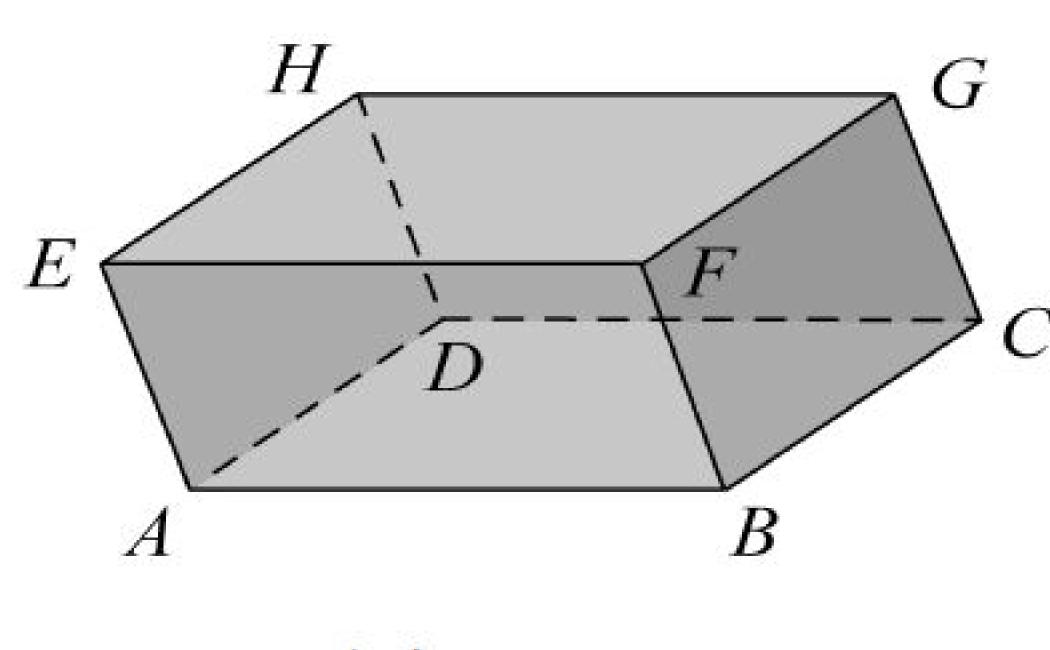


图　1-4-3

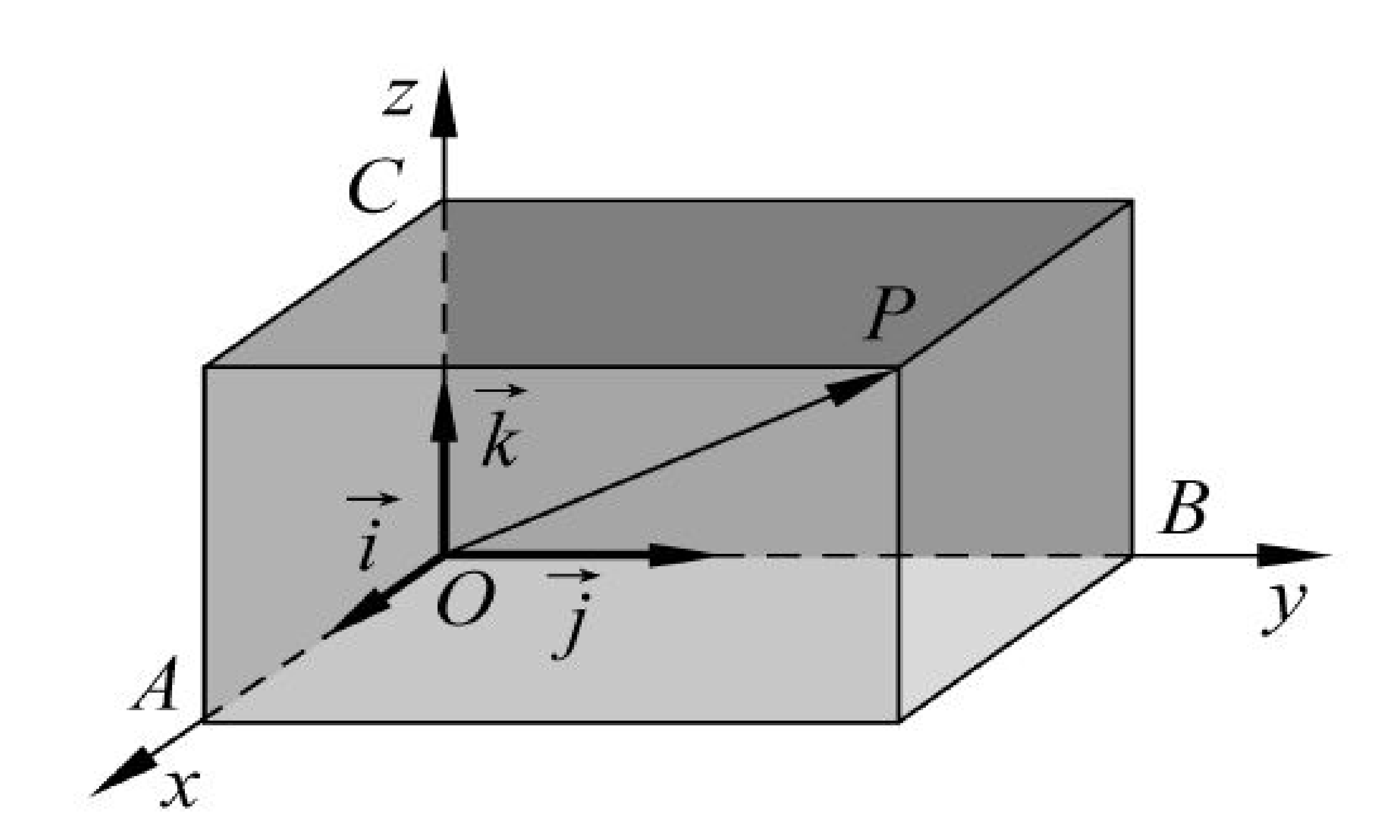


图　1-6-4

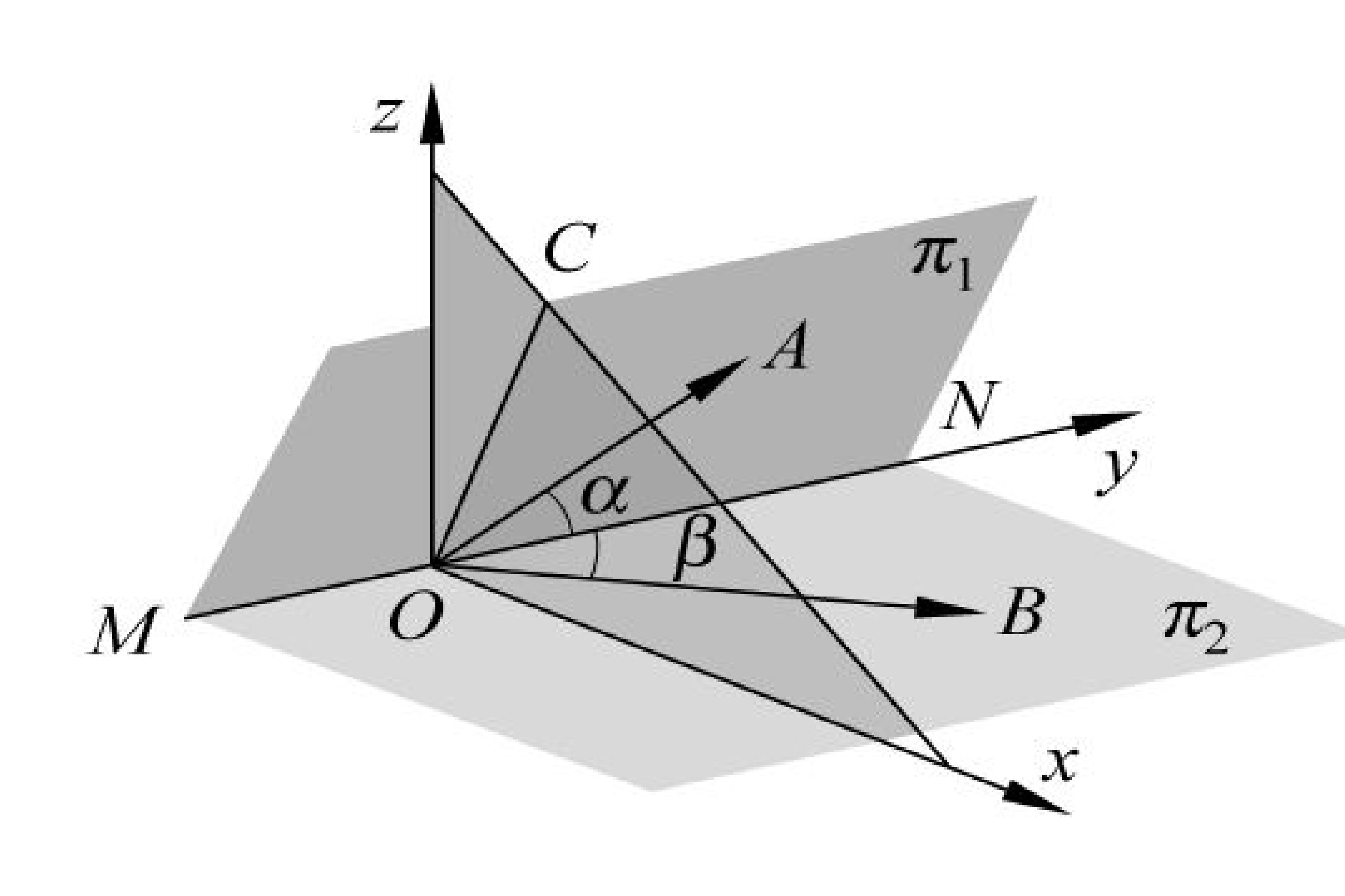


图　1-7-1

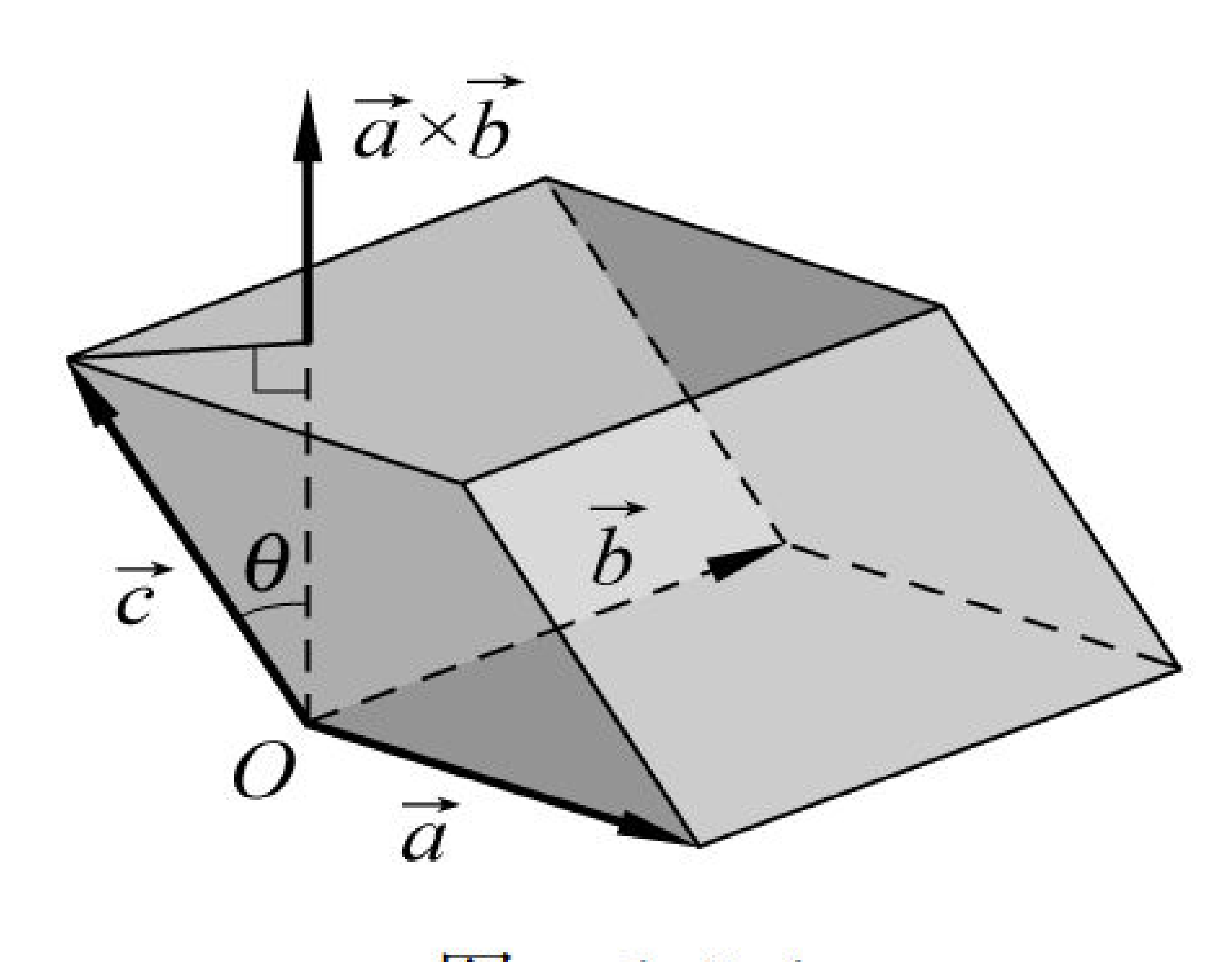


图　1-9-1

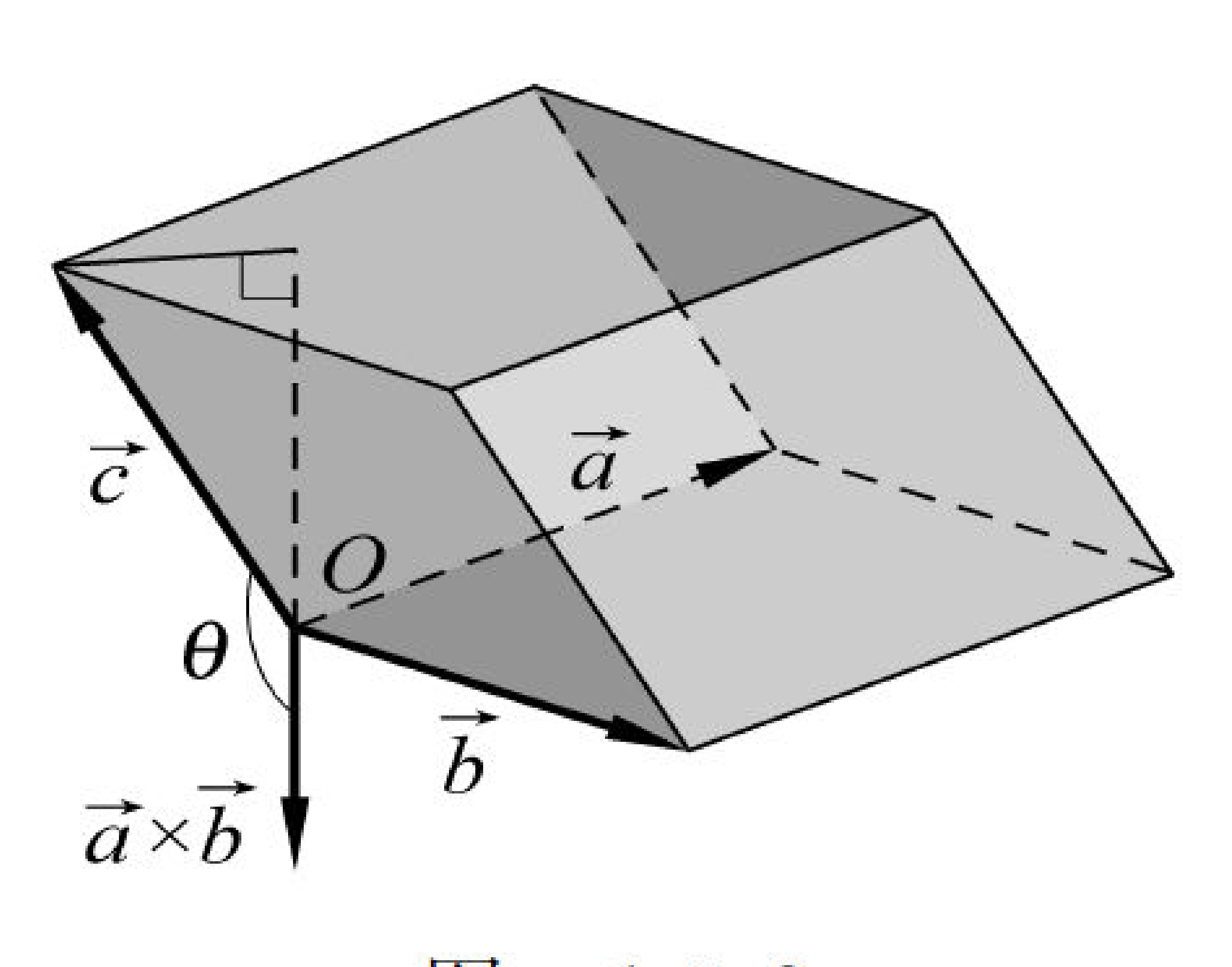


图　1-9-2

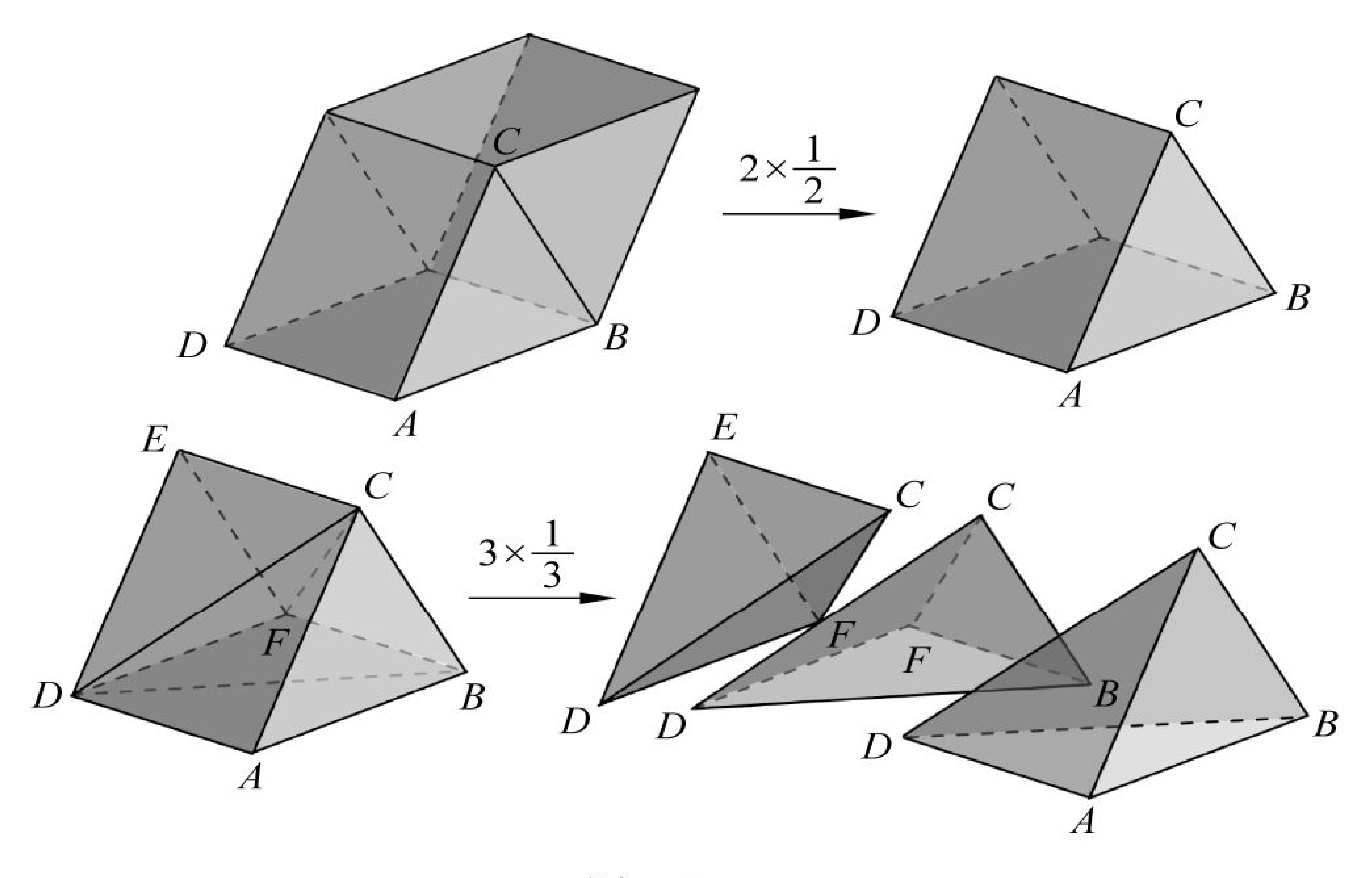


图 1-9-3

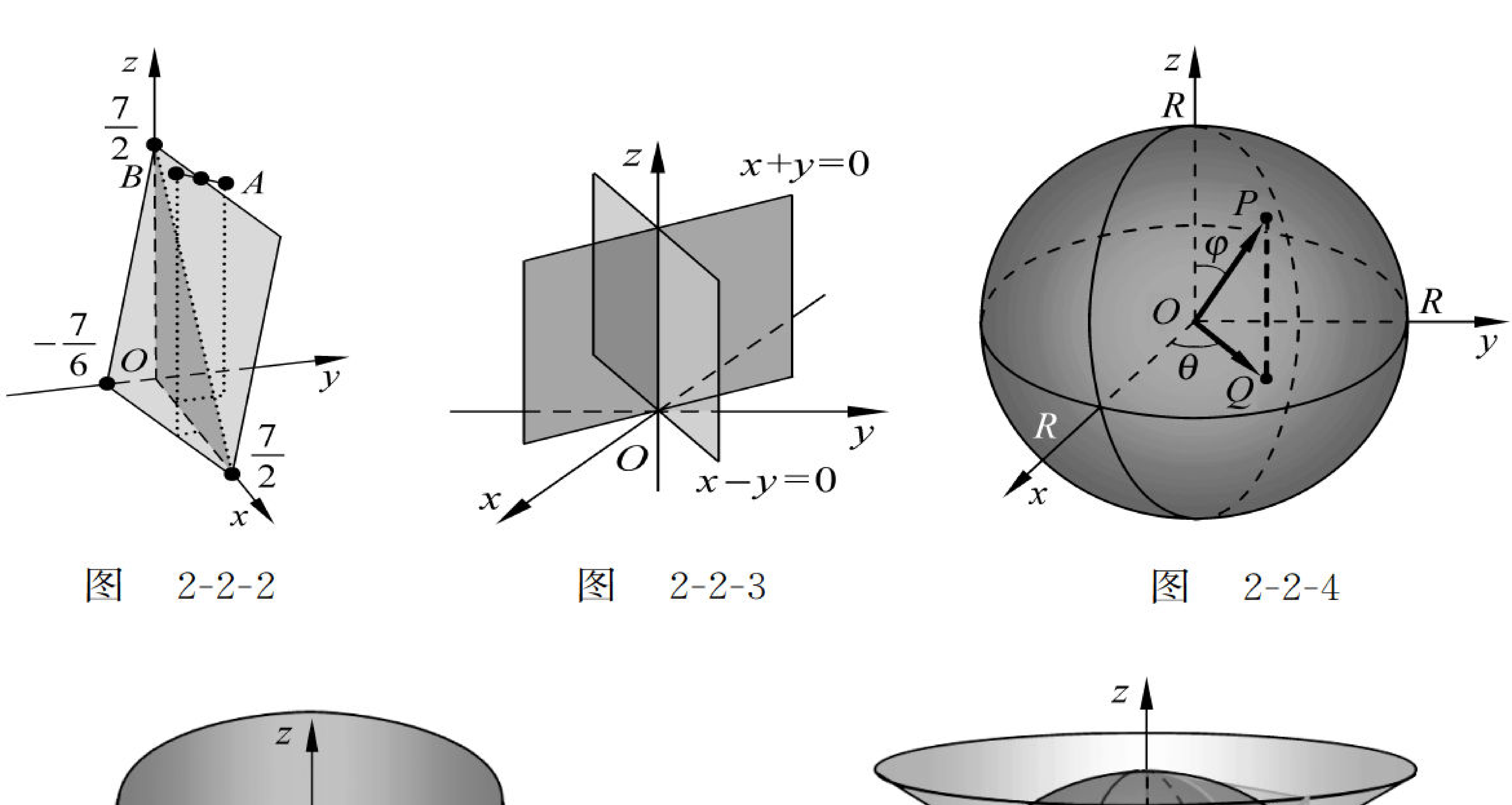


图 2-2-2

图 2-2-3

图 2-2-4

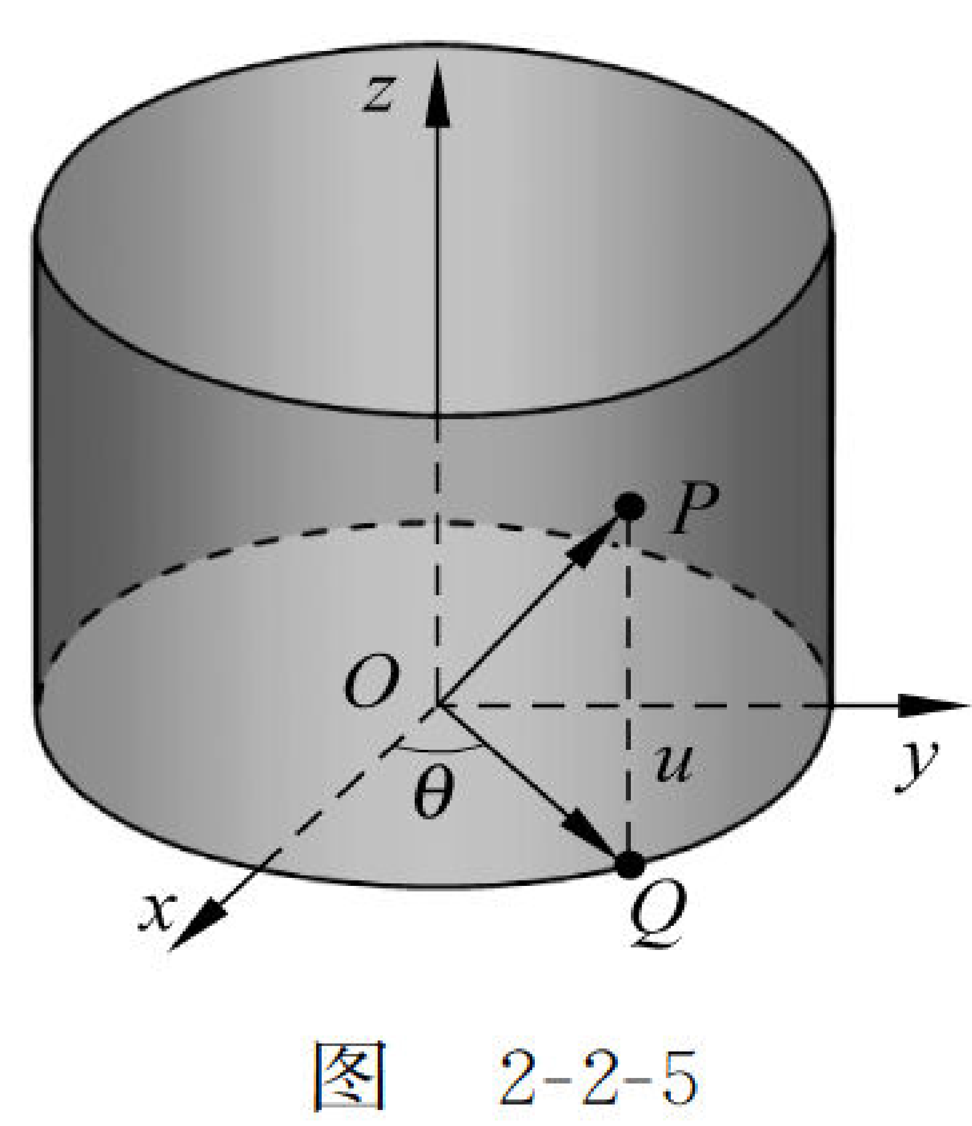


图 2-2-5

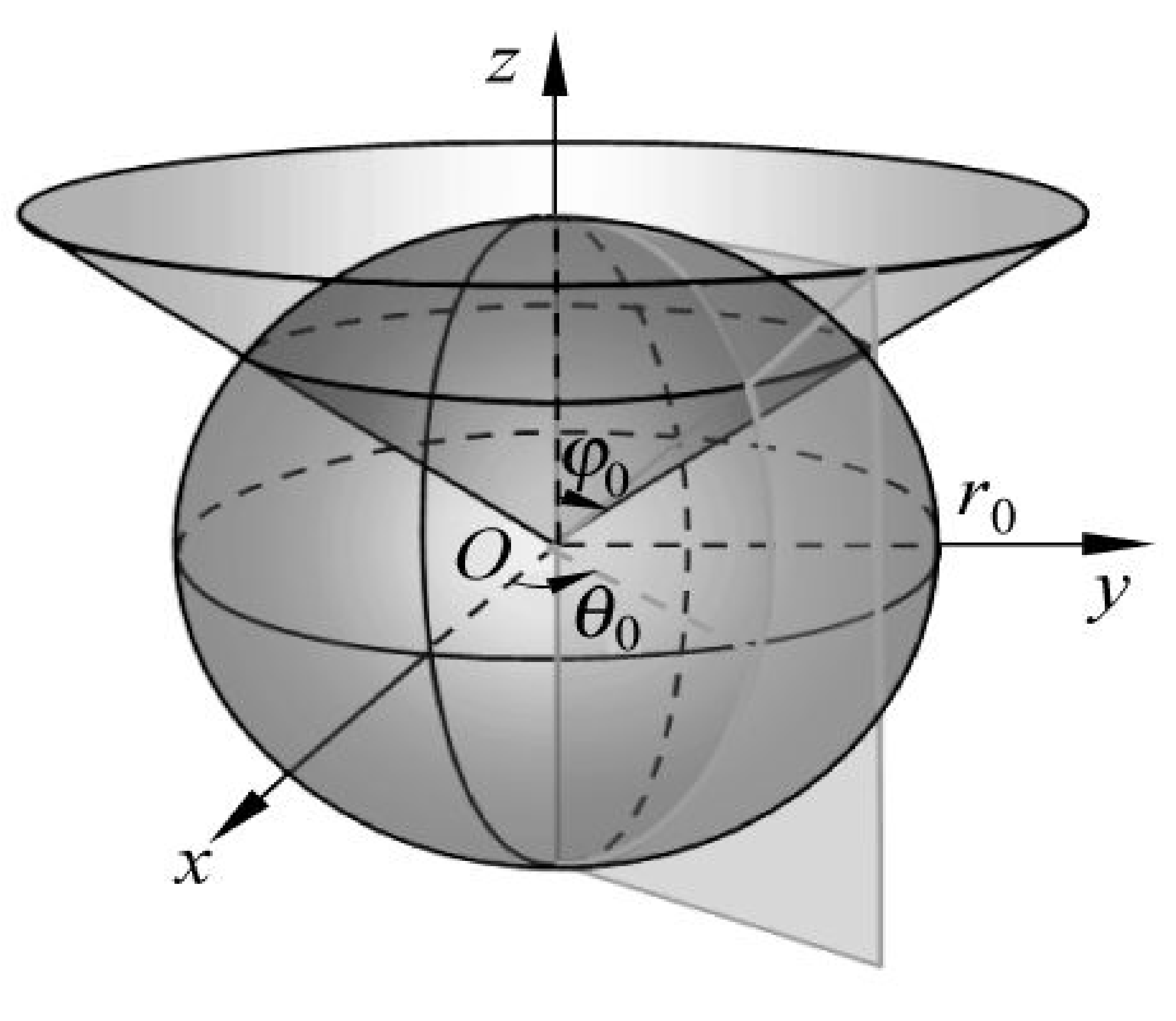


图 2-2-7

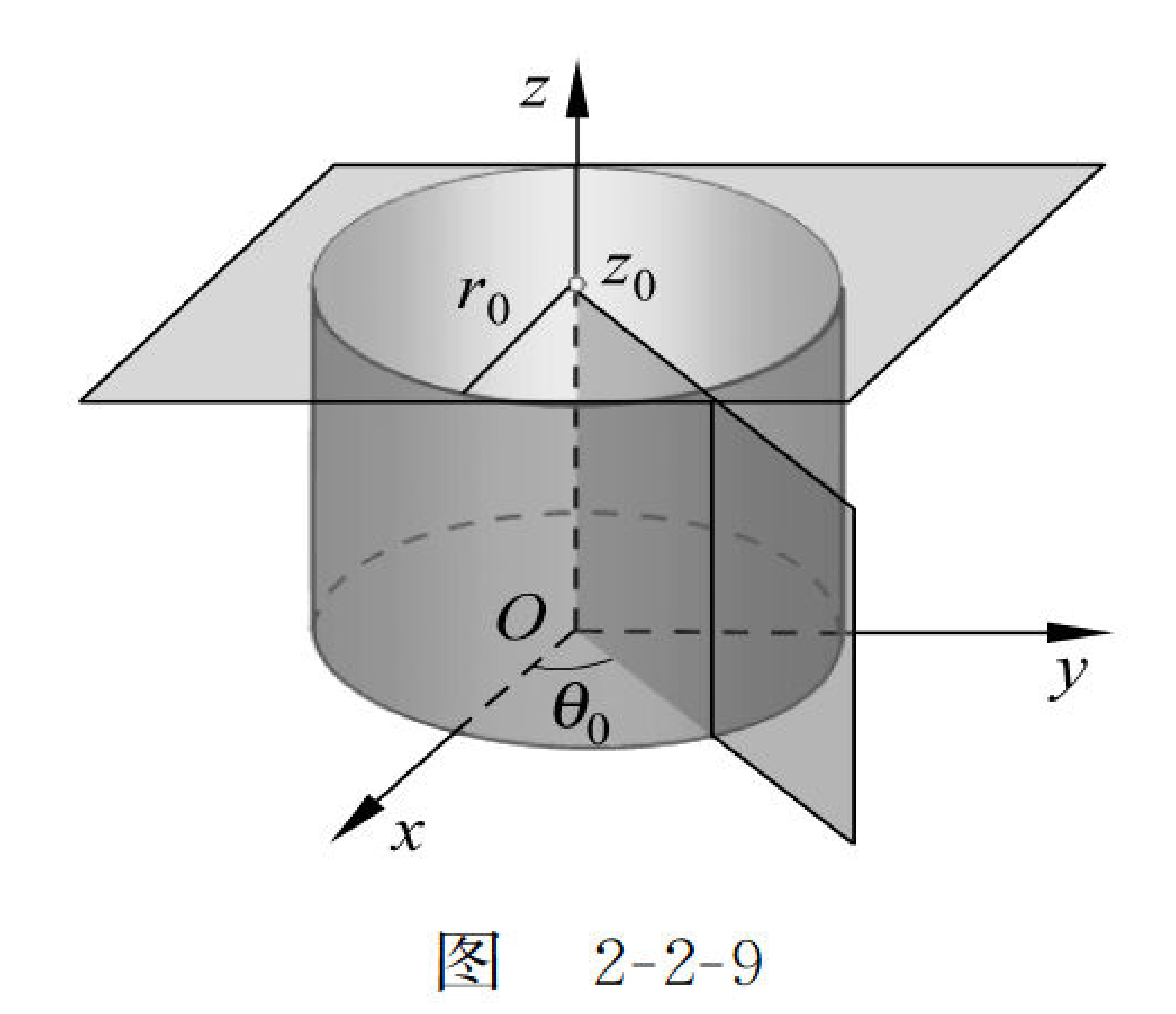


图　2-2-9

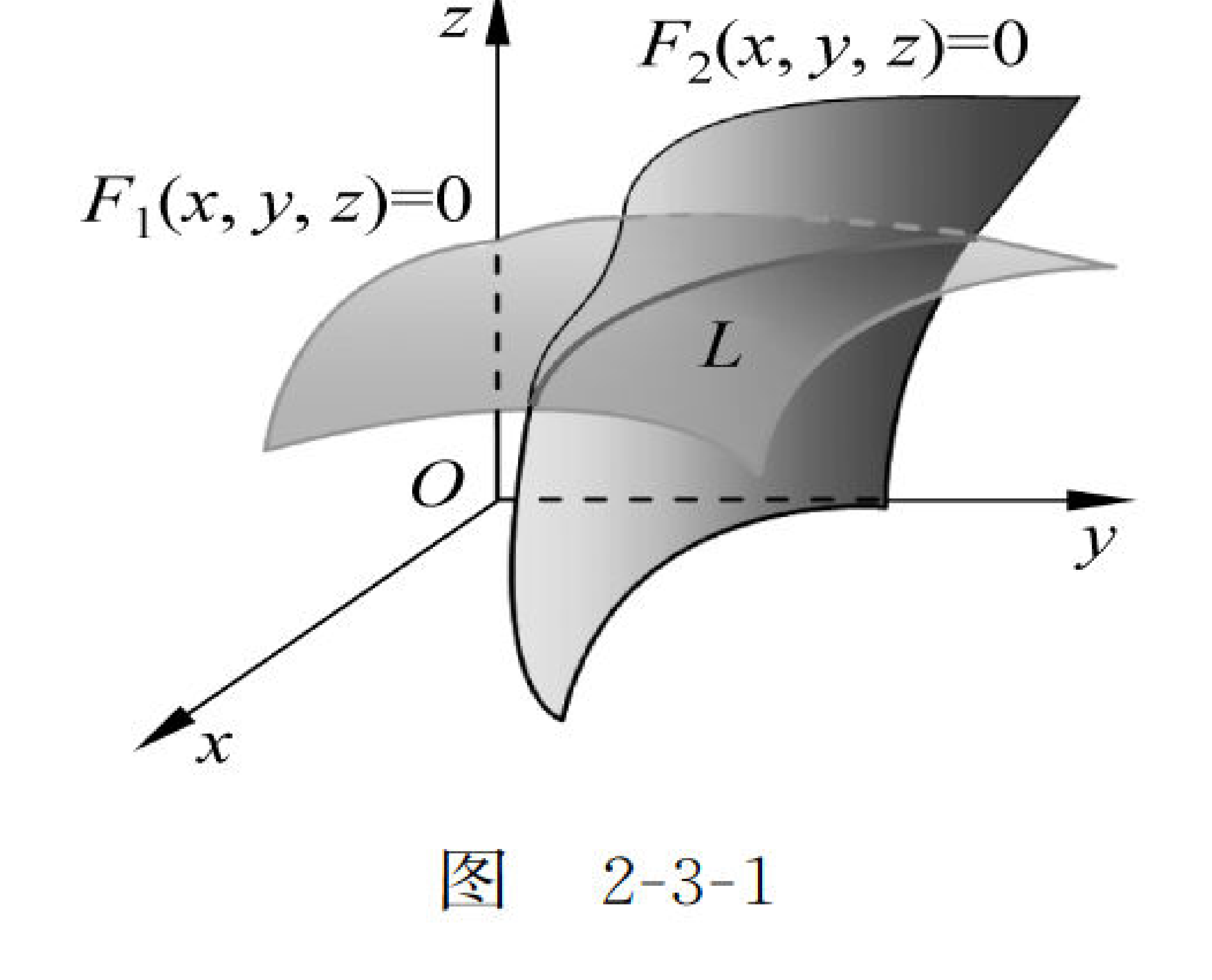


图　2-3-1

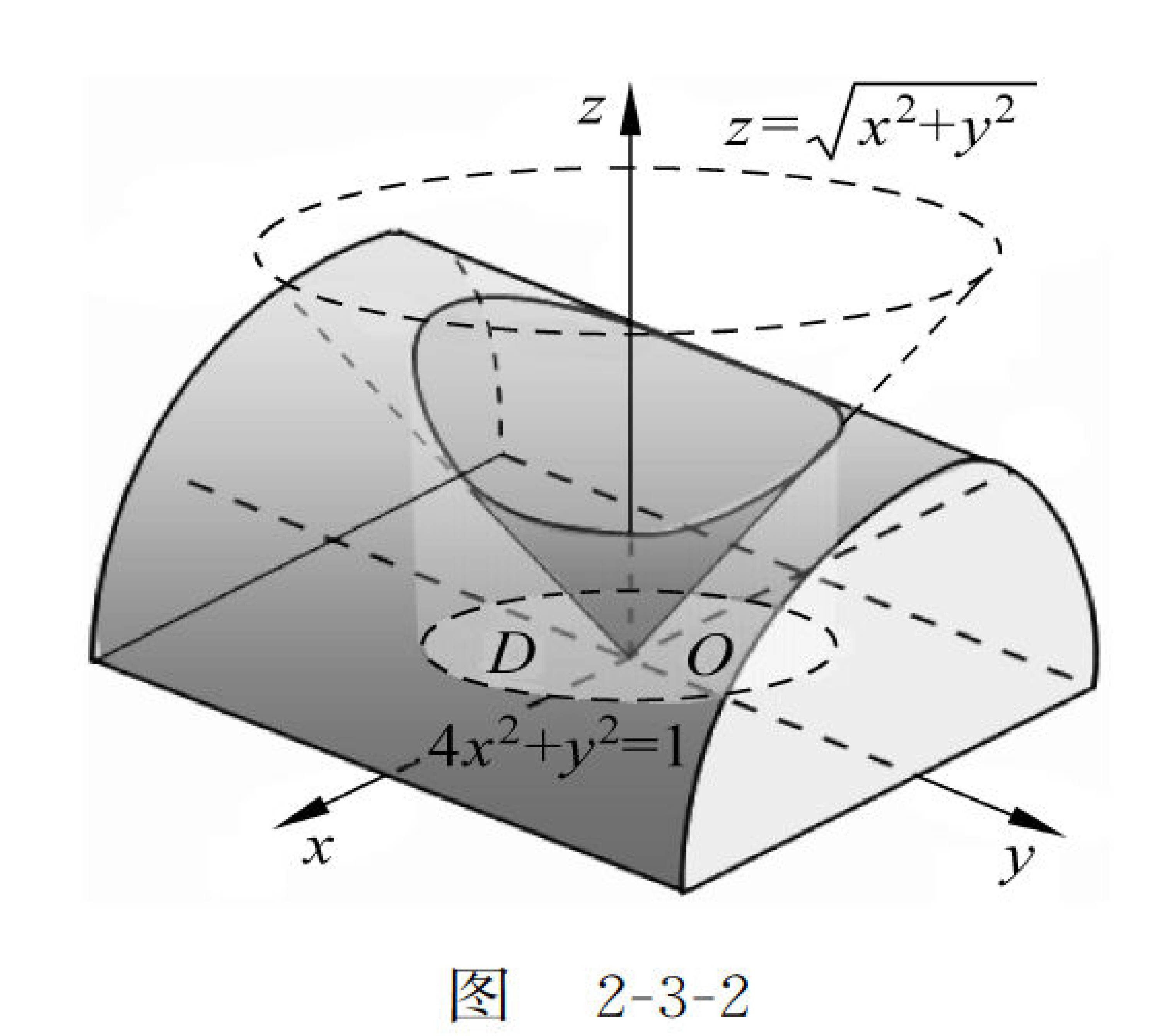


图　2-3-2

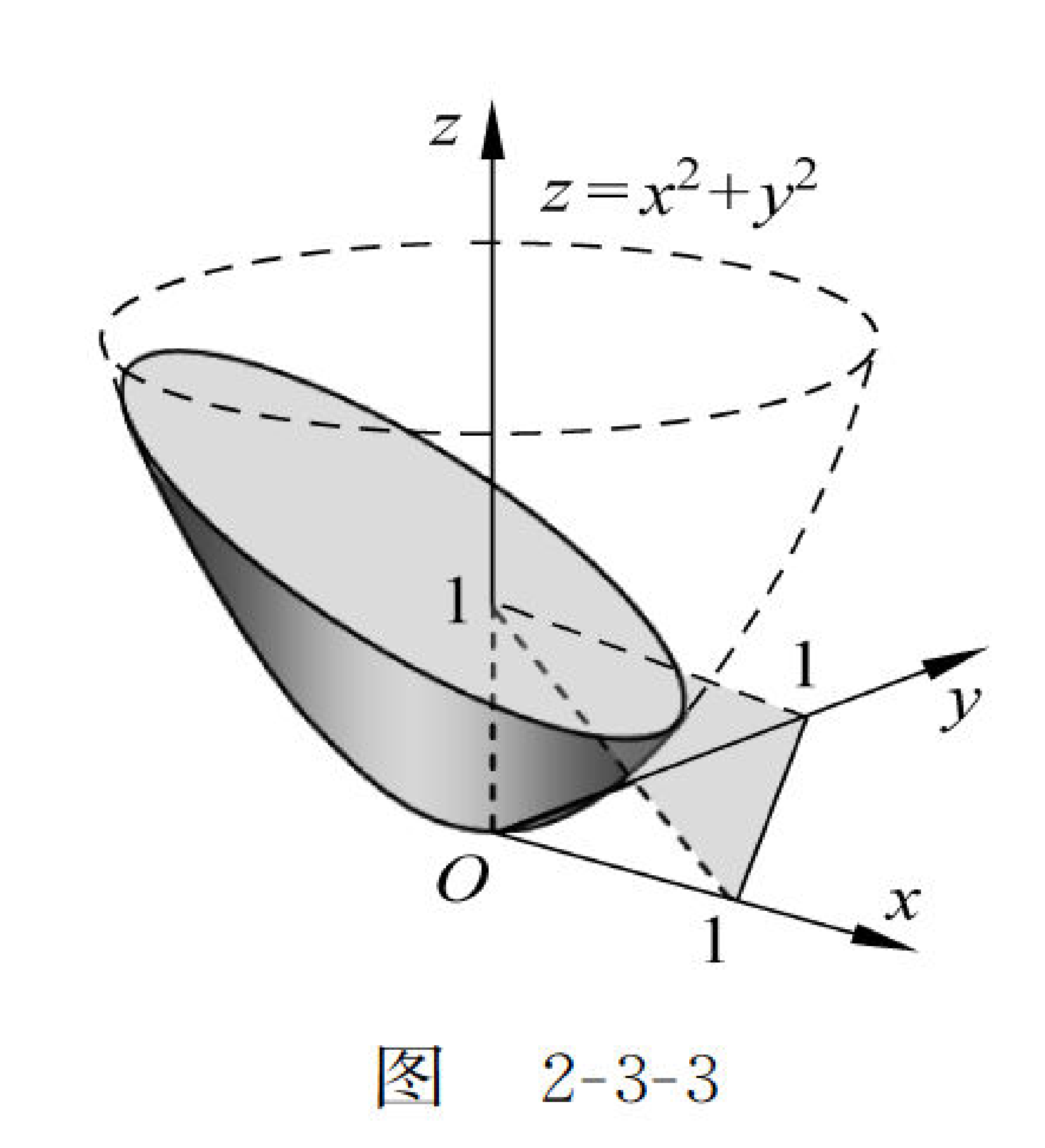


图　2-3-3

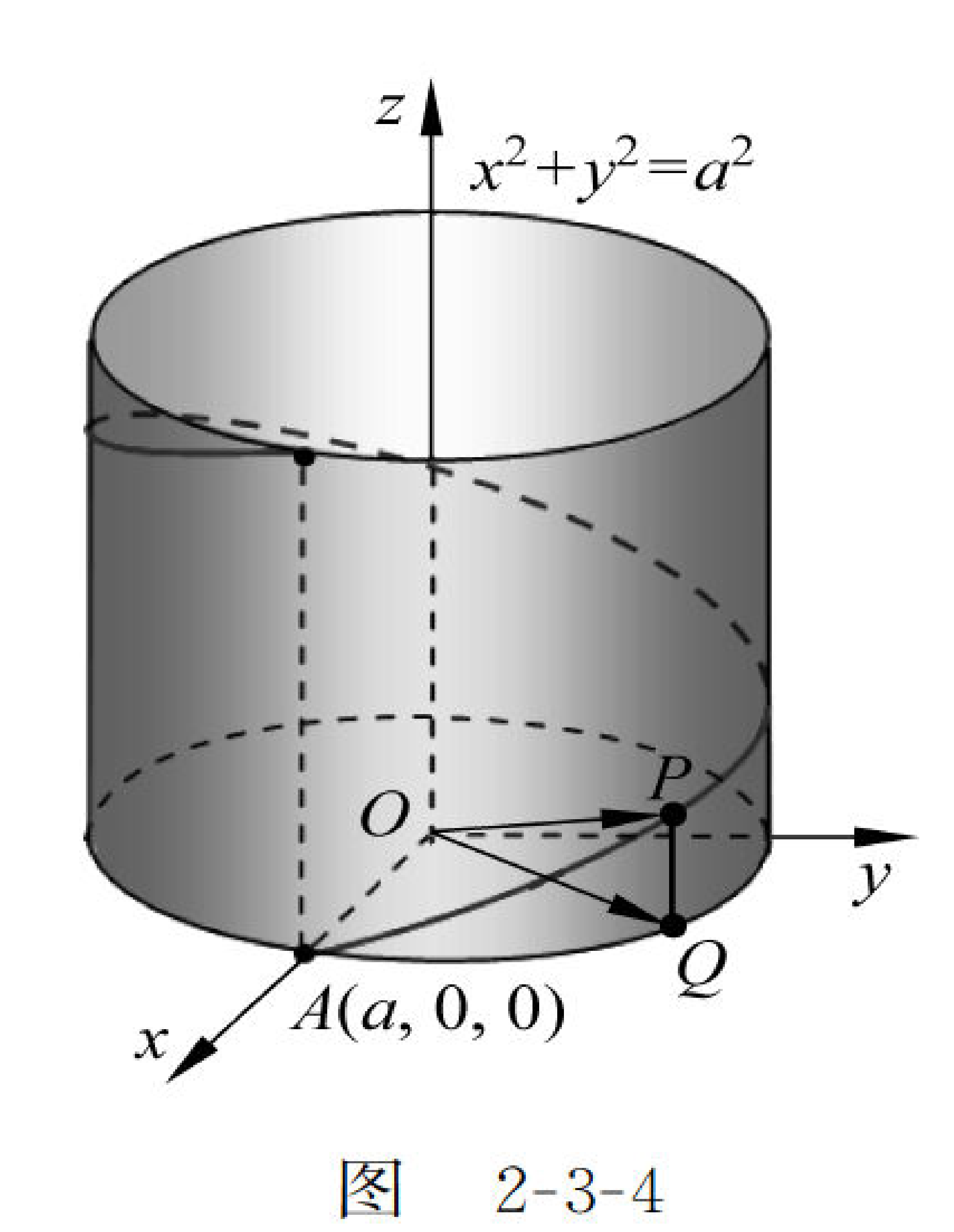


图　2-3-4

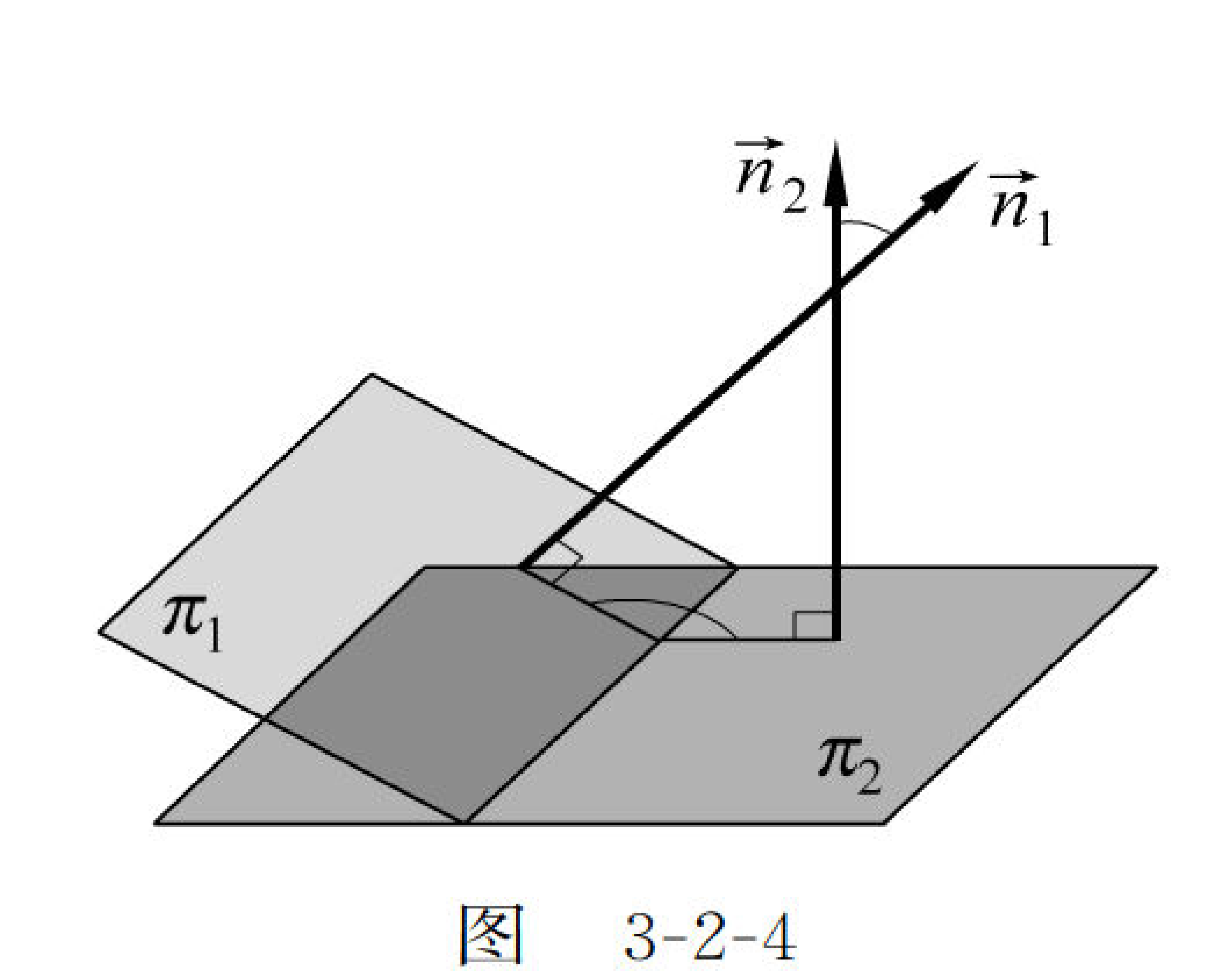


图　3-2-4

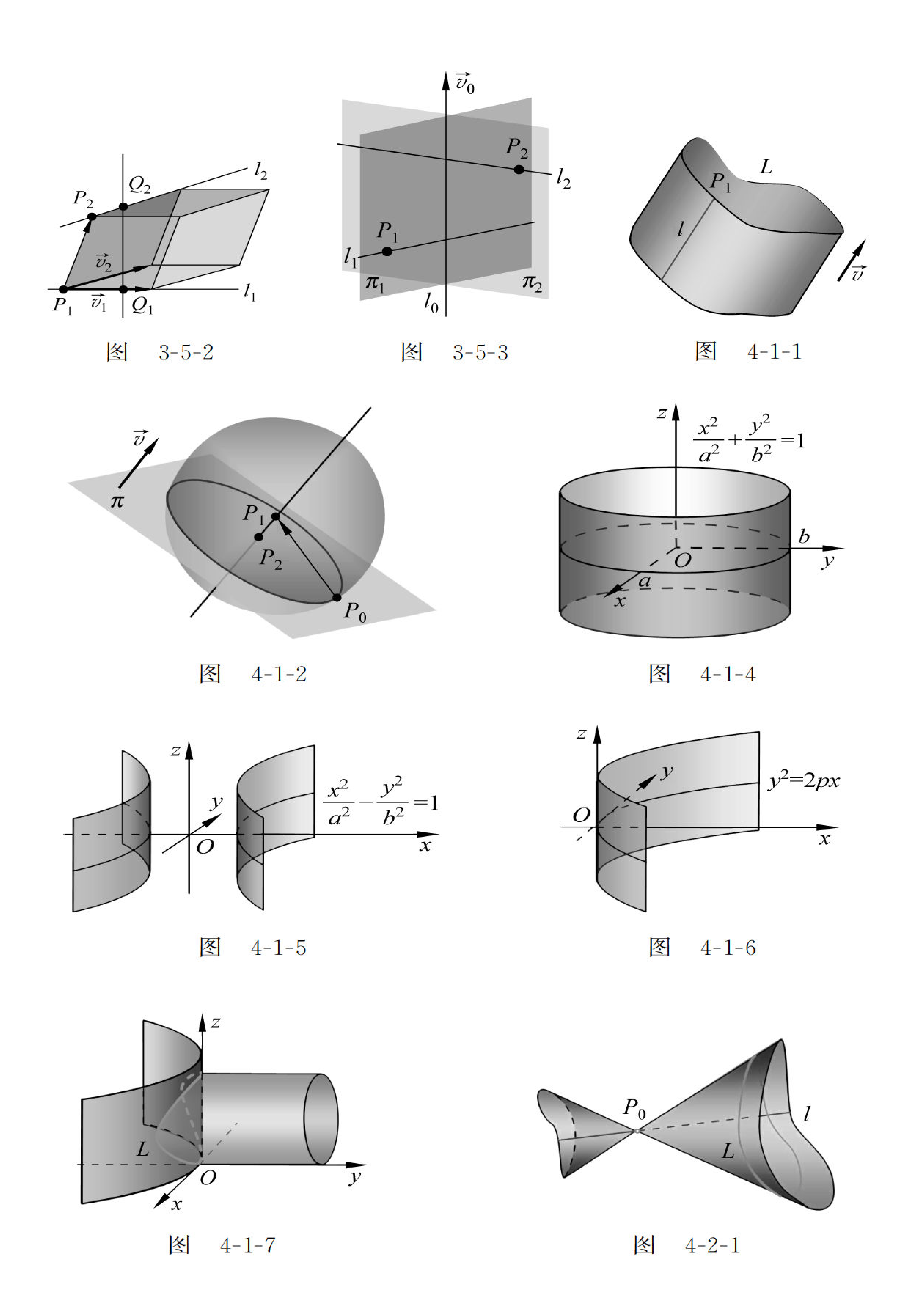


图　3-5-2

图　3-5-3

图　4-1-1

图　4-1-2

图　4-1-4

图　4-1-5

图　4-1-6

图　4-1-7

图　4-2-1

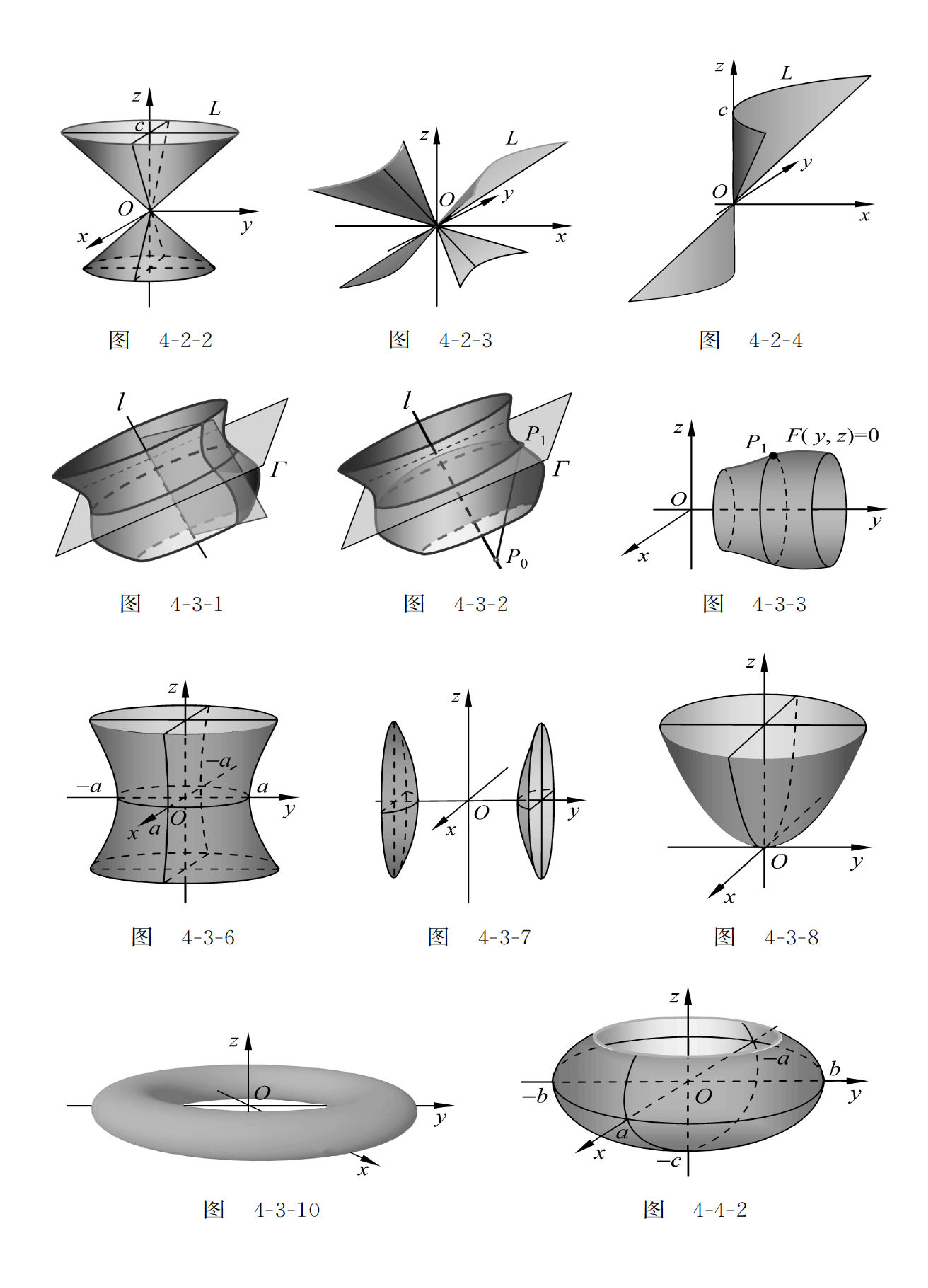


图 4-2-2

图 4-2-3

图 4-2-4

图 4-3-1

图 4-3-2

图 4-3-3

图 4-3-6

图 4-3-7

图 4-3-8

图 4-3-10

图 4-4-2

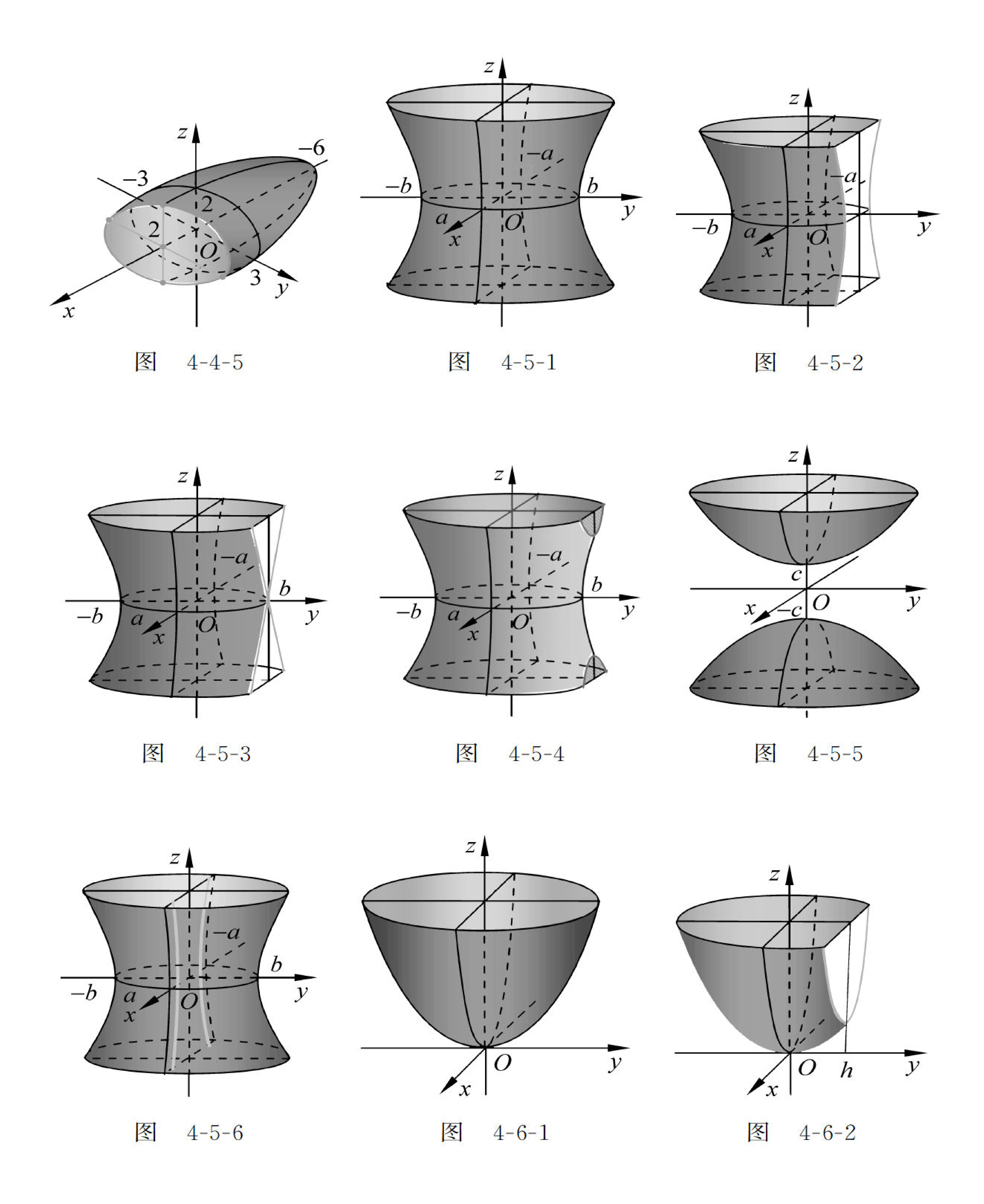


图 4-4-5

图 4-5-1

图 4-5-2

图 4-5-3

图 4-5-4

图 4-5-5

图 4-5-6

图 4-6-1

图 4-6-2

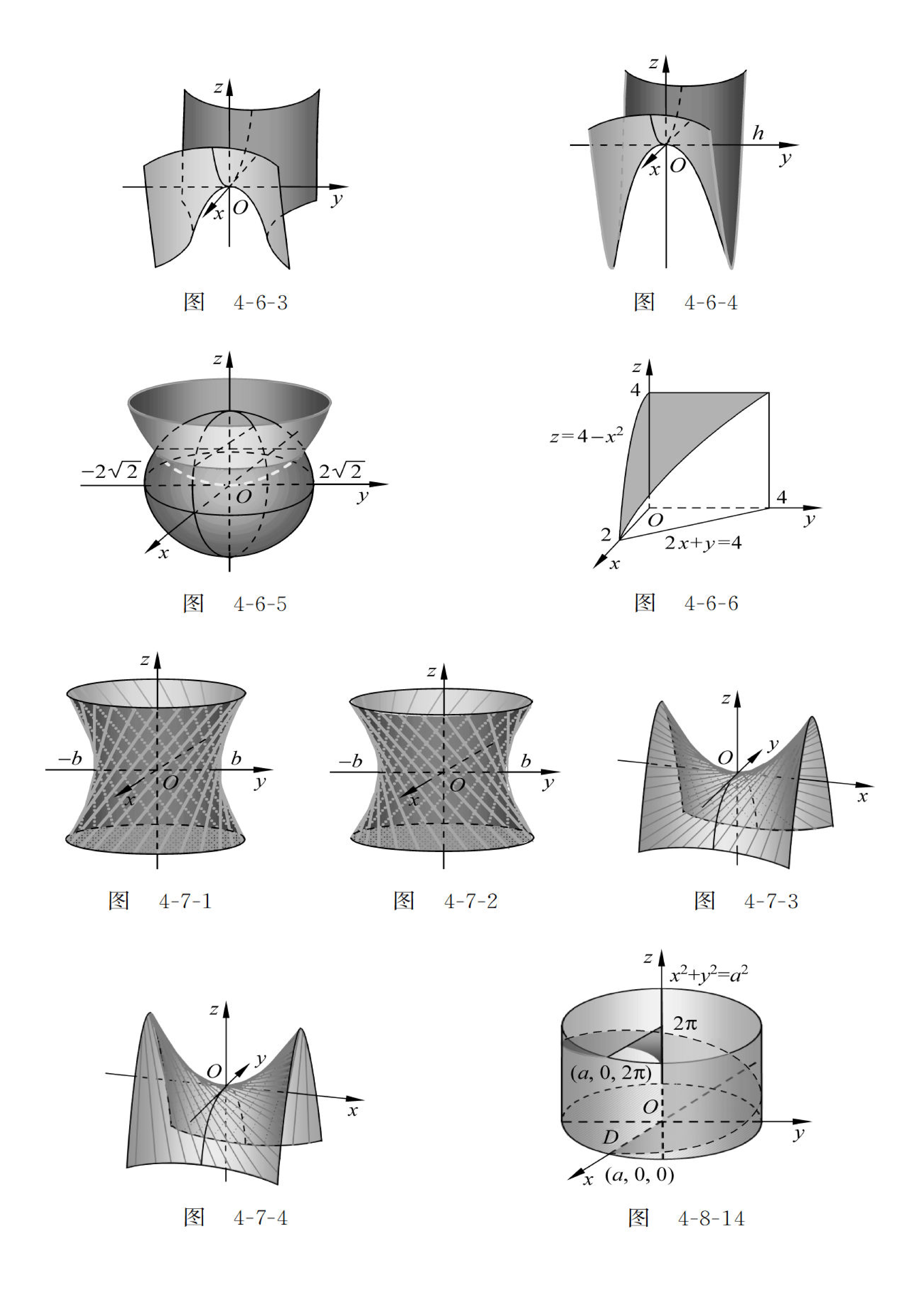


图 4-6-3

图 4-6-4

图 4-6-5

图 4-6-6

图 4-7-1

图 4-7-2

图 4-7-3

图 4-7-4

图 4-8-14

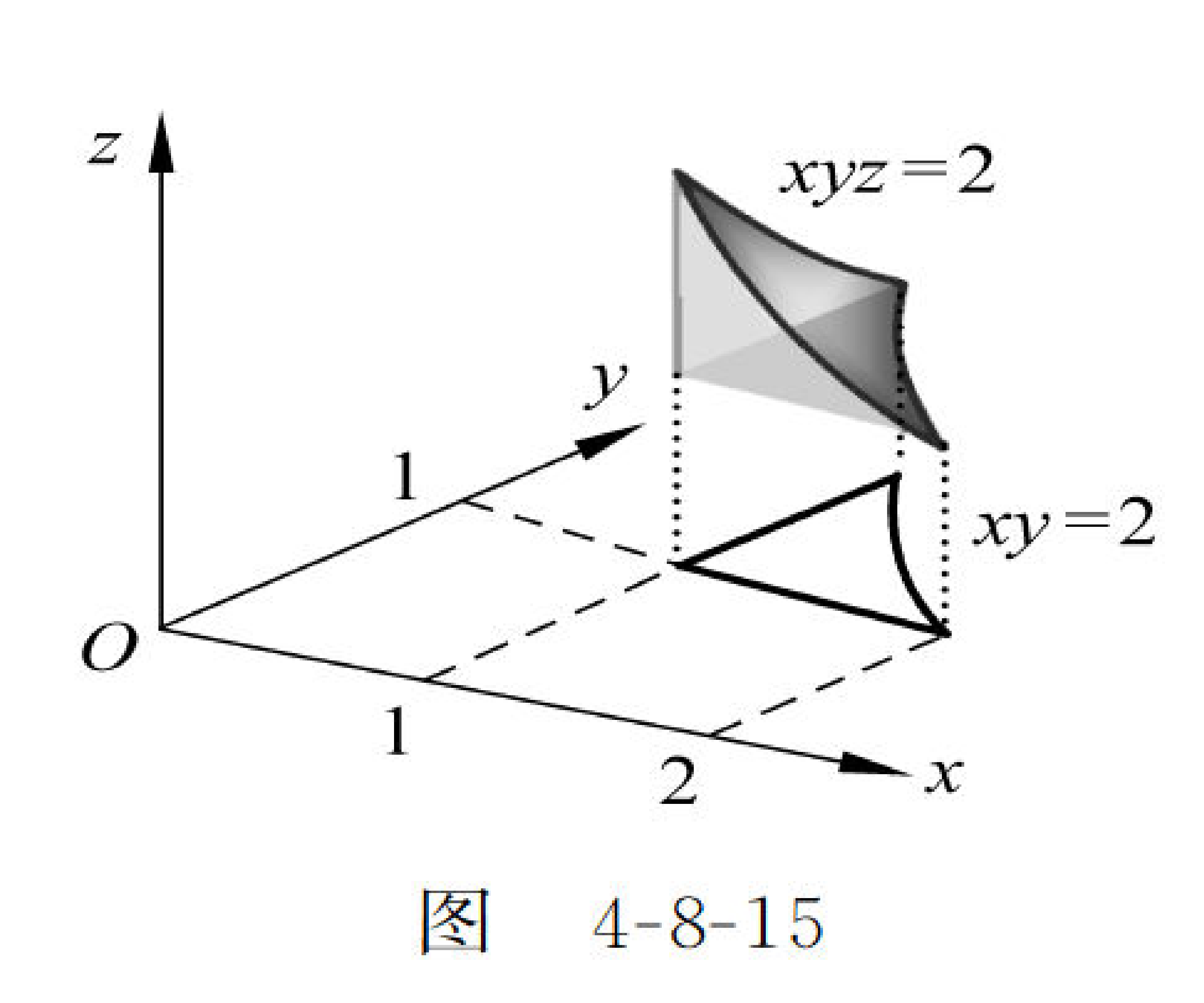


图 4-8-15

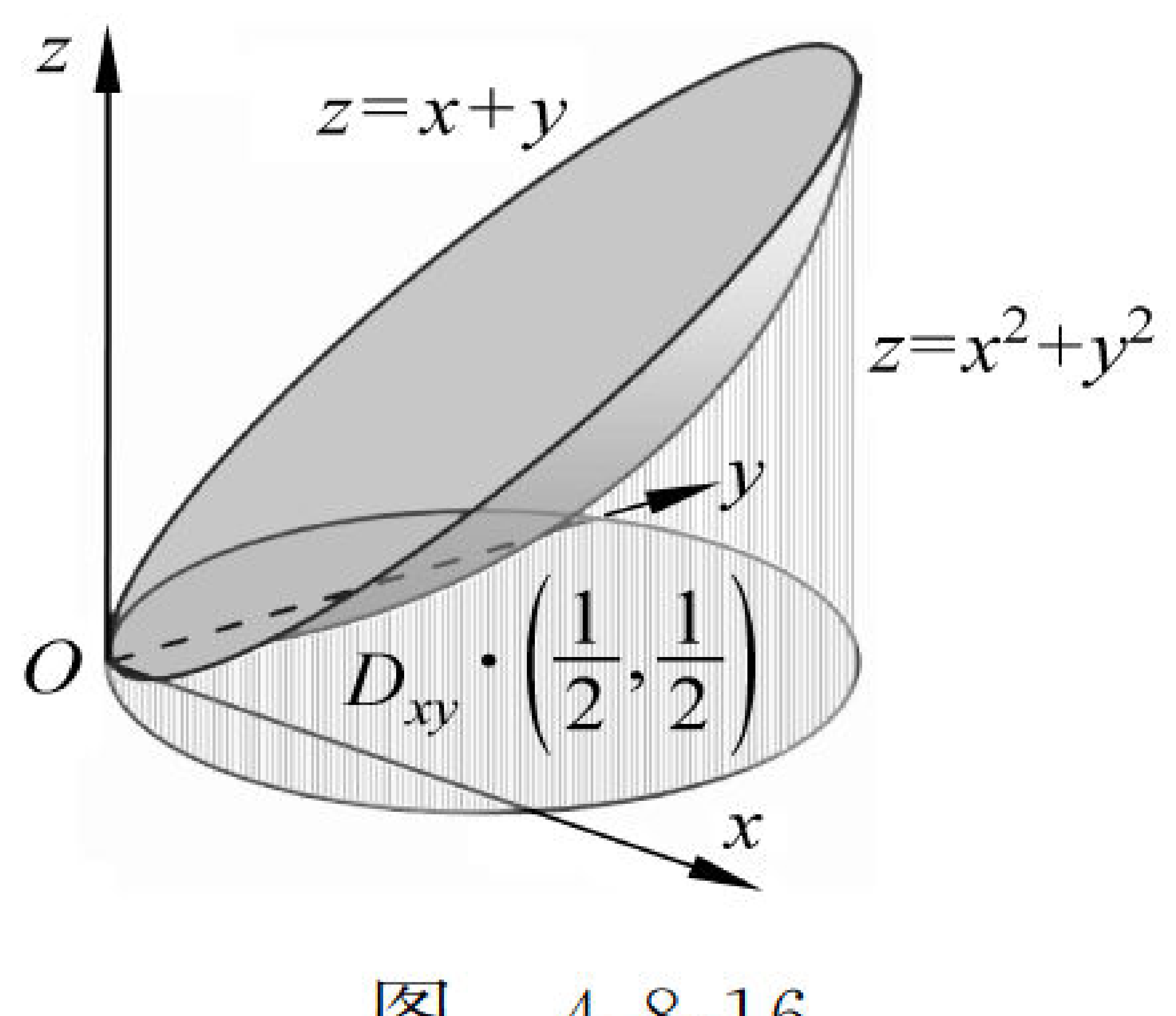


图 4-8-16

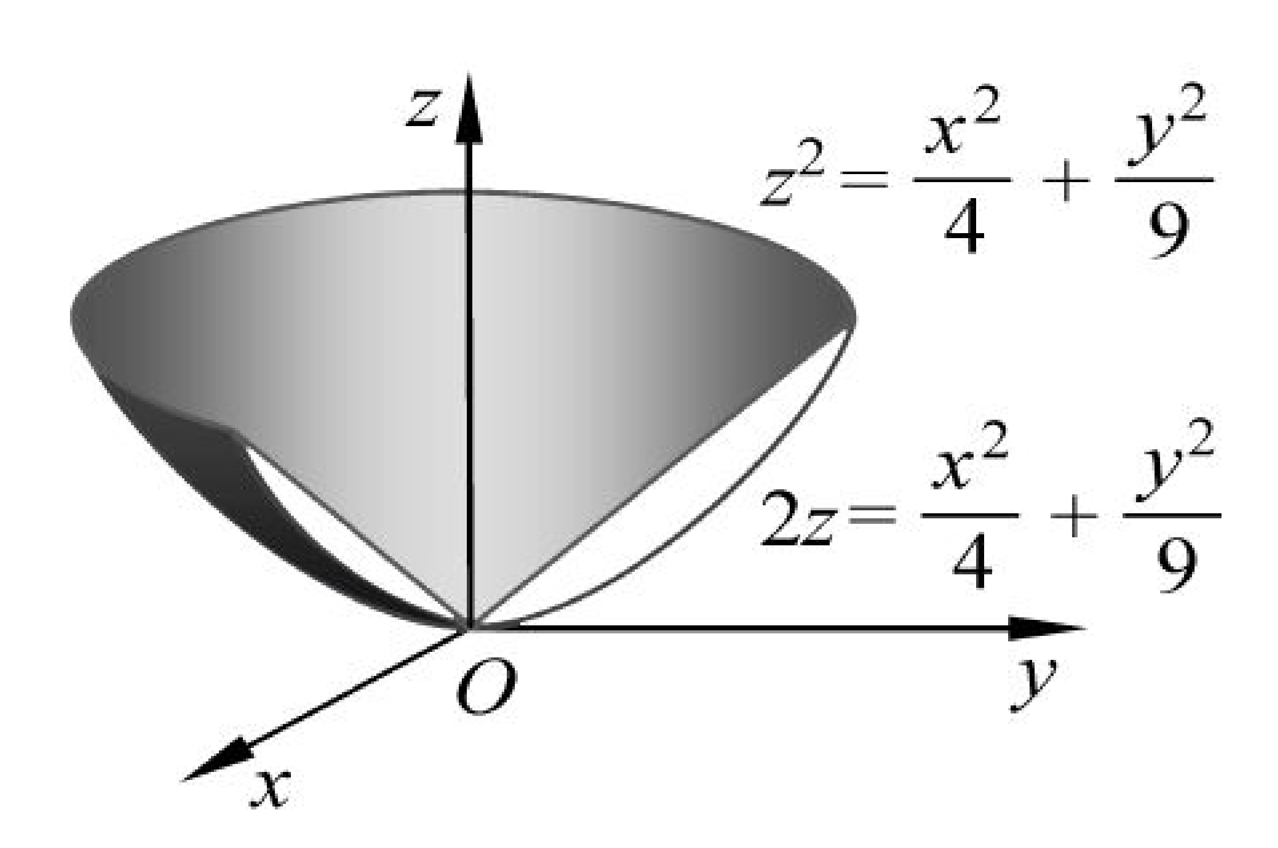


图 4-8-17

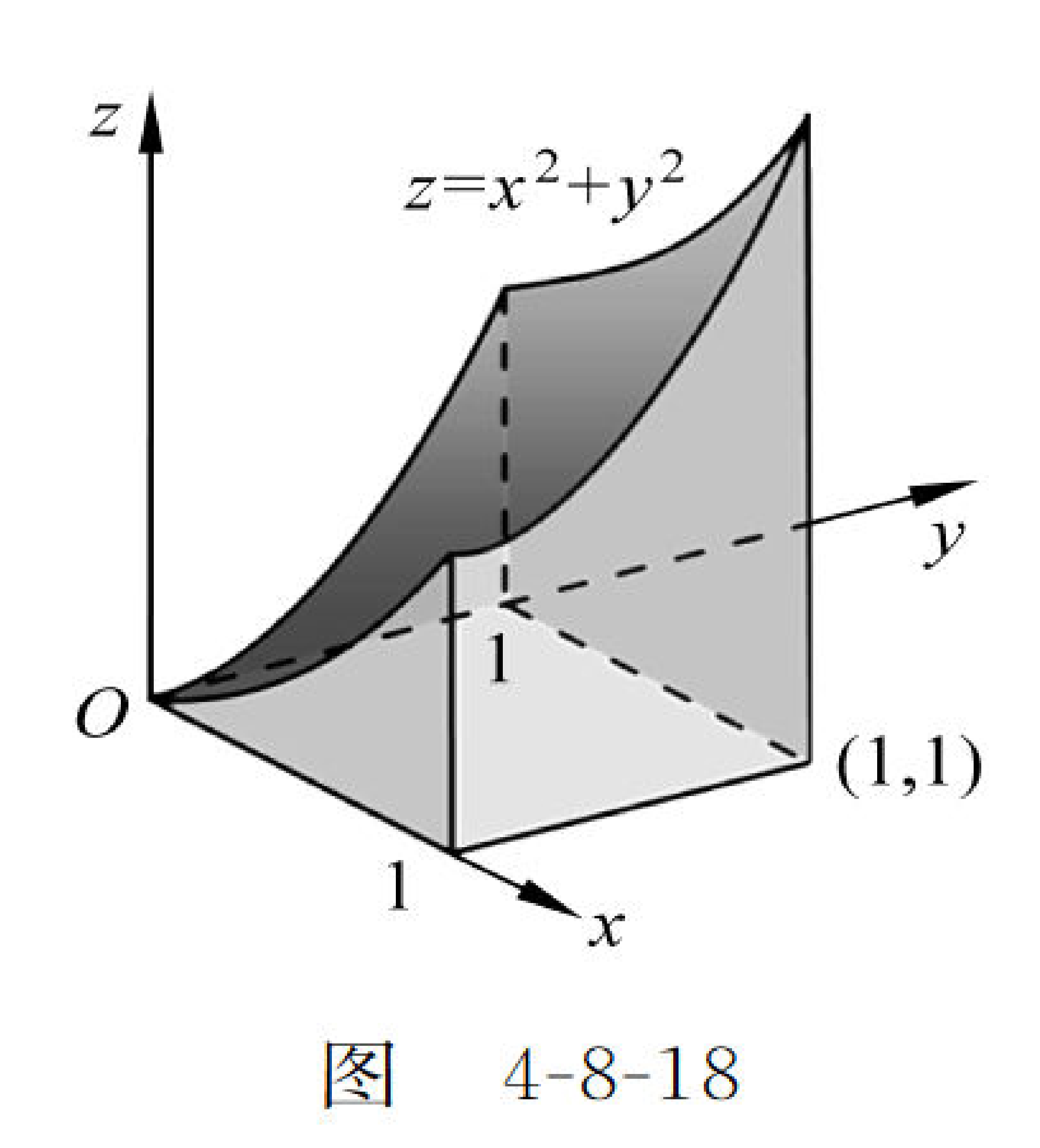


图 4-8-18

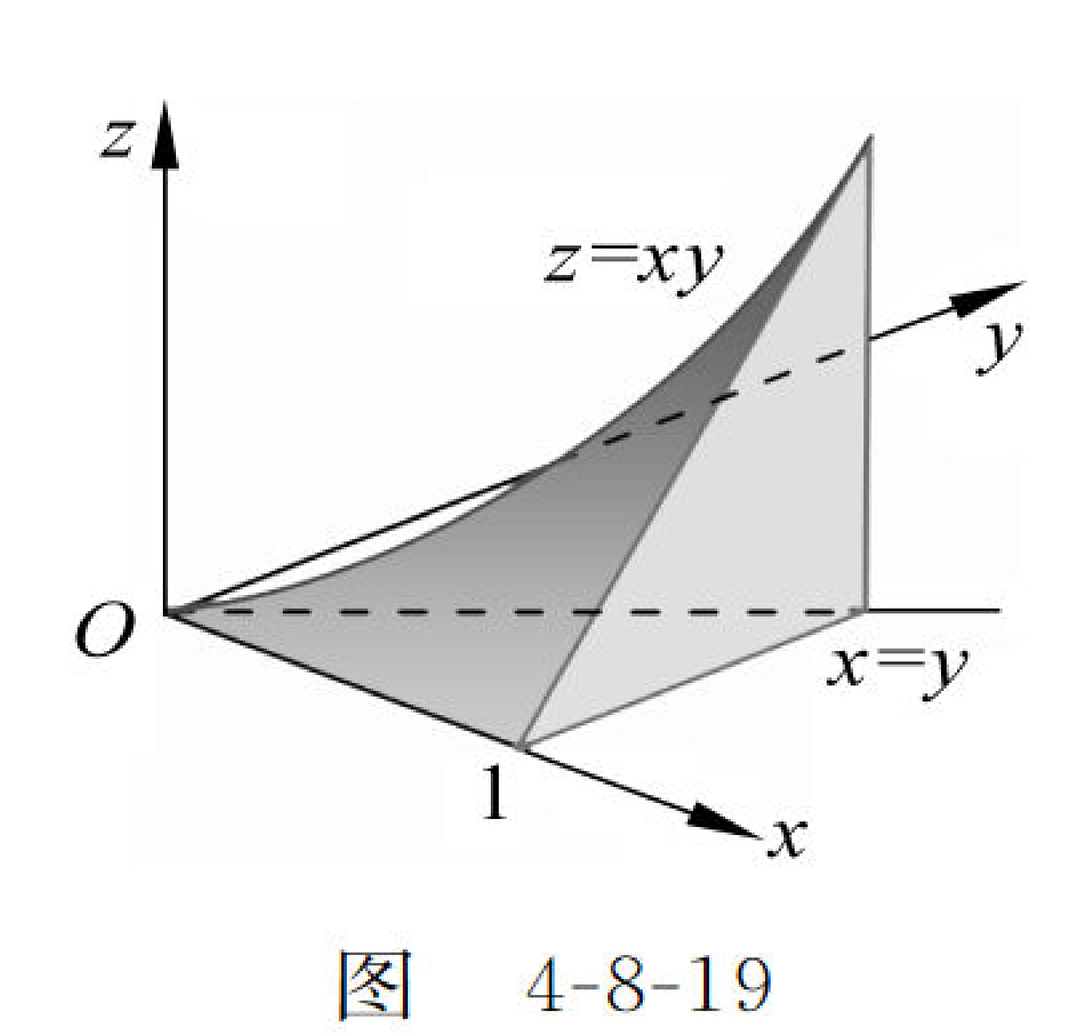


图 4-8-19